

## МЕТОДИКА ВЫБОРА СТРУКТУРЫ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ МАНЕВРИРУЮЩИХ ЦЕЛЕЙ

к.т.н., проф. В.Ш. Хисматуллин, И.А. Кулинич  
(представил д.т.н., проф. А.В. Галенко)

*Проведен анализ взаимосвязи между структурой модели движения маневрирующей цели и точностью оценивания ее состояния. Получены соотношения, позволяющие выбрать наиболее целесообразный вариант структуры алгоритма сопровождения в зависимости от маневренных характеристик цели и точности наблюдений.*

**Постановка задачи.** В основе построения алгоритмов сопровождения лежат модель движения цели и модель наблюдений, определяемые статистическими характеристиками траекторий воздушных целей и методами измерения их координат. Вышеуказанные модели оказывают существенное влияние на структуру и качество алгоритма сопровождения – чем модели более адекватны реальным условиям, тем потенциально более точным оказывается и реализуемый на их основе алгоритм сопровождения. Однако учет всех тонкостей движения цели приводит к сложной и громоздкой структуре алгоритма. Поэтому вопросы выбора вида модели движения цели и, соответственно, структуры алгоритма сопровождения, должны решаться с учетом целесообразности их применения в конкретных условиях.

В работе рассматриваются возможности алгоритмов оценивания состояния цели в зависимости от ее маневренных свойств и от точности наблюдений, и на этой основе устанавливаются наиболее рациональные варианты их структуры.

**1. Статистические модели движения маневрирующей воздушной цели.** Наиболее адекватным реальному является описание движения цели исходя из анализа действующего на нее вектора силы  $\vec{F}(t)$  или создаваемого им вектора ускорения  $\vec{W}(t) = \vec{F}(t)/m$ . В соответствии с подходом, рассмотренным в [1, 2], траекторию маневрирующей воздушной цели можно разбить на ряд чередующихся неизвестным для наблюдателя образом участков прямолинейного равномерного движения и маневрирования. В этом случае составляющие вектора ускорения воздушной

цели полагаются статистически независимыми случайными процессами, имеющими корреляционную функцию

$$R_w(\tau) = \sigma_w^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad (1)$$

где  $\sigma_w$  – среднеквадратическое значение составляющей ускорения;  $\alpha$  – частота маневрирования,  $c^{-1}$ .

Параметры  $\sigma_w$ ,  $\alpha$  модели ускорений (1) задают исходя из анализа характеристик воздушных объектов ( $\sigma_w = 10 \dots 100 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 0,1 \dots 0,02 \text{ с}^{-1}$ ).

Как известно, случайный процесс  $w(t)$  с корреляционной функцией (1) описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dw(t)}{dt} = \alpha w(t) + b\zeta(t)$$

или для дискретного времени  $t = nT$  – разностным уравнением

$$w(n+1) = \rho w(n) + s_3 \zeta(n+1), \quad (2)$$

где  $\zeta(t)/\zeta(n+1)$  – непрерывный/дискретный "белый" шум с единичной спектральной плотностью/дисперсией;  $b = \sigma_w \sqrt{2\alpha}$ ,  $\rho = \exp(-\alpha T)$ ,  $s_3 = \sigma_w \sqrt{1 - \rho^2}$  – коэффициенты уравнения.

Вектор скорости  $\vec{V}(t)$  и радиус вектор  $\vec{R}(t)$  цели связаны с вектором ускорения соотношениями:

$$\vec{V}(t) = \vec{W}(t); \quad \vec{R}(t) = \vec{V}(t). \quad (3)$$

Таким образом, при использовании гипотезы об экспоненциально коррелированных ускорениях полный вектор состояния цели включает 9 компонентов – по три координаты векторов  $\vec{W}(t)$ ,  $\vec{V}(t)$ ,  $\vec{R}(t)$ , взятых в какой-либо системе координат (прямоугольной, сферической, скоростной и др.).

Дальнейшее математическое описание модели движения цели зависит от выбора системы координат, в которой задаются векторы  $\vec{W}(t)$ ,  $\vec{V}(t)$ ,  $\vec{R}(t)$ . В настоящее время для алгоритмов сопровождения наибольшее распространение нашли прямоугольная и сферическая системы координат. В них в большинстве случаев общую 9-мерную модель можно свести к трем идентичным трехмерным моделям. В дискретном времени каждая из моделей имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ \dot{x}(n+1) \\ \ddot{x}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ \dot{x}(n) \\ \ddot{x}(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} \zeta(n+1), \quad (4)$$

где  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  – одна из координат радиус-вектора  $\bar{R}$  и ее производные ( $x = x_1, x_2, x_3$  в прямоугольных координатах,  $x = r, \varepsilon, \beta$  в сферических координатах).

При задании модели в сферических координатах коэффициенты  $s_3$  для угловых координат ( $x = \varepsilon, \beta$ ) необходимо задавать в угловой мере с учетом дальности цели:

$$s_3 = \sigma_w \sqrt{1 - \rho^2} / r.$$

В модели (4), представленной в сферических координатах, учитывается кинематическая связь между дальностью  $r$  и радиальной скоростью  $\dot{r} = v_r$  цели. Поэтому при наличии в составе РЛС измерителей как дальности, так и радиальной скорости, получаемые с их выходов результаты должны обрабатываться в составе единой системы совместного сопровождения. Для организации раздельного сопровождения цели по дальности и по радиальной скорости модель движения по радиальной скорости образуется из (4) путем исключения из вектора состояния координаты  $x = r$ . В результате модель движения цели по радиальной скорости будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(n+1) \\ \ddot{x}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(n) \\ \ddot{x}(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \end{pmatrix} \zeta(n+1). \quad (5)$$

Помимо модели движения маневрирующей цели с экспоненциально коррелированными приращениями, получившей название модели Зингера, нашла применение также простейшая модель, основанная на гипотезе, что ускорение в данный момент времени не зависит от ускорений, имевших место в другие моменты времени – модель с независимыми вторыми приращениями. В этом случае из вектора состояния исключается составляющая  $\ddot{x}$ , и модель движения цели (4) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ \dot{x}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ \dot{x}(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \end{pmatrix} \zeta(n+1), \quad (6)$$

где  $s_2 = \sigma_w T$  – коэффициент, характеризующий среднеквадратическое приращение скорости за интервал времени  $T$ .

В общем виде модели (4) – (6) описываются векторно-матричным линейным разностным стохастическим уравнением вида

$$\bar{x}(n+1) = \Phi \bar{x}(n) + S \zeta(n+1), \quad (7)$$

где  $\Phi, S$  – квадратная матрица состояния и матрица-столбец возбужде-

ния соответствующих моделей;  $\bar{x}(n)$  – вектор состояния;  $\zeta(n)$  – шум возмущений движения цели, являющийся дискретной белой последовательностью с единичной дисперсией.

**2. Точностные характеристики алгоритмов сопровождения маневрирующей цели.** Будем полагать, что уравнение наблюдений имеет следующий вид:

$$y(n) = H\bar{x}(n) + \xi(n), \quad (8)$$

где  $H$  – матрица-строка, равная  $[1 \ 0 \ 0]$  для трехмерного вектора состояния  $\bar{x}$ , и  $[1 \ 0]$  – для двумерного вектора;  $\xi(n)$  – последовательность независимых ошибок наблюдений (измерений) с дисперсией  $\sigma_{\xi}^2$ .

Тогда точность функционирования оптимального алгоритма сопровождения определяется следующими рекуррентными уравнениями [3]:

1) уравнение для определения матрицы ковариаций ошибок оценивания вектора состояния

$$P(n) = M(n) - \Delta M(n), \quad (9)$$

где

$$\Delta M(n) = M(n) H^T [HM(n) H^T + \sigma_{\xi}^2(n)]^{-1} HM(n) -$$

матрица, характеризующая уменьшение ошибок экстраполяции в результате проведения наблюдений с дисперсией ошибки  $\sigma_{\xi}^2(n)$ ;

2) уравнение для нахождения матрицы  $M(n+1)$  ковариаций ошибок экстраполяции к очередному радиоконтакту

$$M(n+1) = \Phi P(n) \Phi^T + Q(n), \quad (10)$$

где  $Q(n) = S(n) S^T(n)$  – матрица ковариаций составляющих ошибок экстраполяции, обусловленных шумом возмущений  $\zeta(n)$ .

В установившемся режиме и при постоянной точности измерений  $\sigma_{\xi}^2(n) = \sigma_{\xi}^2$  справедливо  $M(n+1) = M(n) = M$ ,  $P(n+1) = P(n) = P$ . В этом случае для алгоритмов отдельного сопровождения, основанных на модели Зингера, рекуррентные уравнения (9), (10) преобразуются в следующие системы нелинейных алгебраических уравнений:

– для алгоритмов сопровождения по радиальной скорости:

$$\begin{aligned} m_{11} &= p_{11} + 2T p_{12} + T^2 p_{22}; & m_{12} &= \rho(p_{12} + T p_{22}); \\ m_{22} &= \rho^2 p_{22} + s_3^2; & p_{11} &= m_{11} - m_{11}^2 d; \\ p_{12} &= m_{12} - m_{12} m_{11} d; & p_{22} &= m_{22} - m_{12}^2 d; \end{aligned} \quad (11)$$

– для алгоритмов сопровождения по компонентам радиус-вектора:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= p_{11} + 2Tp_{12} + T^2(p_{22} + p_{13}) + T^3p_{23} + \frac{1}{4}T^4p_{33}; \\
 m_{12} &= p_{12} + T(p_{22} + p_{13}) + \frac{3}{2}T^2p_{23} + \frac{1}{2}T^3p_{33}; \\
 m_{13} &= \rho \left( p_{13} + Tp_{23} + \frac{1}{2}T^2p_{33} \right); \quad m_{22} = p_{22} + 2Tp_{23} + T^2p_{33}; \\
 m_{23} &= \rho (p_{23} + Tp_{33}); \quad m_{33} = \rho^2p_{33} + s_3^2; \\
 p_{11} &= m_{11} - m_{11}^2d; \quad p_{12} = m_{12} - m_{11}m_{12}d; \\
 p_{13} &= m_{13} - m_{11}m_{13}d; \quad p_{22} = m_{22} - m_{12}^2d; \\
 p_{23} &= m_{23} - m_{12}m_{13}d; \quad p_{33} = m_{33} - m_{13}^2d,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $d = (m_{11} + \sigma_\xi^2)^{-1}$ .

В результате решения данных уравнений получены следующие зависимости относительной точности оценивания сопровождаемой координаты  $\pi_{11} = p_{11} / \sigma_\xi^2$  от характеристик внешних воздействий:

– по компонентам ( $r \in \beta$ ) или ( $x_1 \ x_2 \ x_3$ ) координат радиус-вектора

$$(1 - \pi_{11})(1 - \rho(1 - \pi_{11}))^2 \mu_{011} = (1 - \sqrt{1 - \pi_{11}})^4 (1 - \rho\sqrt{1 - \pi_{11}})^4, \tag{13}$$

где

$$\mu_{011} = \frac{1}{4}T^4 \sigma_w^2 (1 - \rho^2) / \sigma_\xi^2; \tag{14}$$

– по радиальной скорости

$$(1 - \pi_{11})(1 + \rho(1 - \pi_{11}))^2 \mu_{011} = \pi_{11}^2 (1 - \rho^2(1 - \pi_{11}))^4, \tag{15}$$

где

$$\mu_{011} = T^2 \sigma_w^2 (1 - \rho^2) / \sigma_\xi^2. \tag{16}$$

Отметим, что величины  $\pi_{11}$  являются коэффициентами сглаживания оценок координат соответствующими алгоритмами сопровождения [4].

Как видно из (13), (15), относительная точность оценивания координат зависит только от значений параметров  $\mu_{011}$ . Согласно (14), (16) параметры  $\mu_{011}$  полностью определяются характеристиками внешних воздействий и являются безразмерными. Указанные свойства обусловили их применение в качестве аргумента при проведении анализа потен-

циальных возможностей алгоритмов сопровождения маневрирующих целей в зависимости от характеристик внешних воздействий. Пользуясь выражениями (11), (12), можно показать, что

$$\mu_{011} = m_{11} / \sigma_{\xi}^2 \Big|_{p_{11}=0}, \quad (17)$$

т.е. они являются составляющими дисперсии ошибки экстраполяции (сопровождения), обусловленной только маневренными свойствами цели, нормированными относительно точности проводимых наблюдений.

Для алгоритмов, основанных на гипотезе о независимости вторых приращений, соответствующие системы нелинейных уравнений и их решения получаются из (11) – (16), если принять  $\rho = 0 (\alpha T \rightarrow \infty)$ , а ковариационную матрицу Q задать следующим образом:

$$Q = s^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} T^2 & \frac{1}{2} T \\ \frac{1}{2} T & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

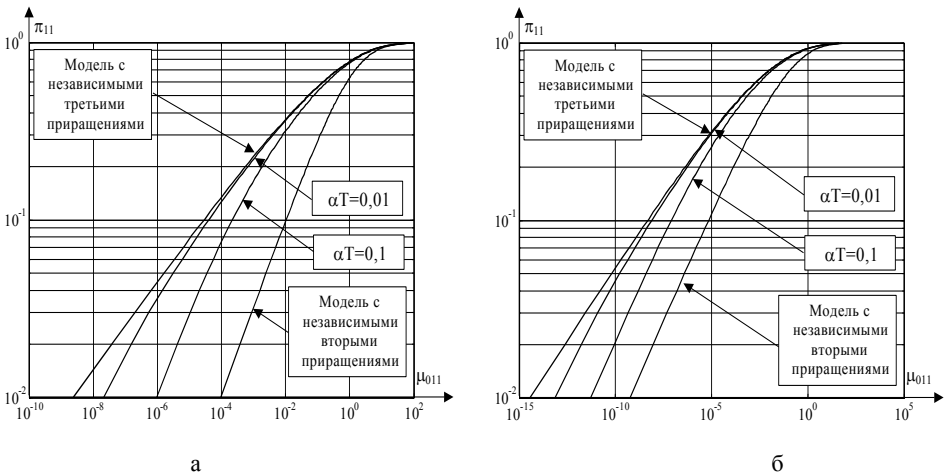


Рис. 1. Зависимость  $\pi_{11}(\mu_{011})$ : а – по компонентам координат радиус-вектора; б – по радиальной скорости

Зависимости  $\pi_{11}(\mu_{011})$  приведены на рис. 1 (сплошные линии – для алгоритмов сопровождения по координатам ( $r \in \beta$ ) или  $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ , пунктирные – для алгоритма сопровождения по радиальной скорости). Как следует из их анализа, при  $\mu_{011} \rightarrow 0$ , что имеет место в случаях низкого качества наблюдений ( $\sigma_u^2 \rightarrow \infty$ ) и (или) при сопровождении сла-

бо маневрирующих целей ( $\sigma_w^2 \rightarrow 0$ ), коэффициент сглаживания оптимального алгоритма стремится к нулю, а при  $\mu_{011} > 1$  он близок к единице. При фиксированном значении  $\mu_{011}$  коэффициент сглаживания оптимального алгоритма лежит в пределах от минимального значения, имеющего место при  $\rho \rightarrow 0$  ( $\alpha T \rightarrow \infty$ ), т.е. для алгоритмов, основанных на гипотезе о независимости вторых приращений, до максимального, имеющего место при  $\rho \rightarrow 1$  ( $\alpha T \rightarrow 0$ ). Последний случай приводит к алгоритмам сопровождения, основанным на модели с независимыми третьими приращениями [4].

**3. Выбор модели движения цели.** Из рассмотренных подходов к построению моделей движения цели следует, что основное различие между ними заключается в способе представления ускорения маневрирующей цели. При использовании модели Зингера ускорение (вторая производная координаты) входит в состав вектора состояния и подлежит оцениванию в процессе функционирования алгоритма. В случае использования модели с независимыми вторыми приращениями оно исключено из вектора состояния системы и, следовательно, не уточняется в процессе сопровождения.

Тогда эффективность применения модели Зингера целесообразно характеризовать величиной отношения

$$\pi_w = \frac{p_w}{\sigma_w^2}, \quad (19)$$

где  $p_w$  – дисперсия ошибки оценивания ускорения, равная нижнему диагональному элементу матрицы  $P$  дисперсии ошибок оценивания.

В результате решения систем алгебраических уравнений (11), (12), получены следующие зависимости:

– для алгоритмов сопровождения по координатам ( $\tau \in \beta$ ) или  $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ :

$$\pi_w = 1 - \frac{\rho^2 (1 - \sqrt{1 - \pi_{11}})^4}{(1 - \sqrt{1 - \pi_{11}})^4}, \quad (20)$$

– для алгоритма сопровождения по радиальной скорости

$$\pi_w = 1 - \frac{\rho^2 \pi_{11}}{(1 - \rho^2 \sqrt{1 - \pi_{11}})^2}. \quad (21)$$

На рис. 2 представлены графики зависимости  $\pi_w(\pi_{11})$  при различных значениях периода обращения  $T$  (сплошные линии – для систем сопровождения по координатам  $(\gamma \varepsilon \beta)$  или  $(x_1 x_2 x_3)$ , пунктирные – для системы сопровождения по радиальной скорости).

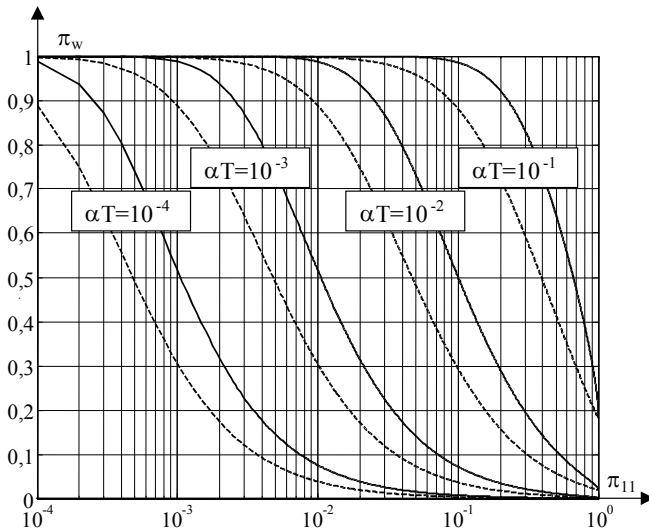


Рис. 2. Зависимость  $\pi_w(\pi_{11})$

Как следует из анализа полученных зависимостей, точность оценивания ускорения увеличивается с увеличением коэффициента сглаживания оптимальной системы  $\pi_{11}$ .

Таким образом, алгоритм сопровождения маневрирующей цели, основанный на модели Зингера, эффективен в случае проведения точных наблюдений и (или) при сопровождении интенсивно маневрирующих целей.

В предельном случае, когда  $\pi_{11} \rightarrow 1$ , минимально достижимое значение коэффициента  $\pi_w$  определяется выражением

$$\pi_{w \min} = 1 - \rho^2. \quad (22)$$

Из анализа графиков, представленных на рис. 2, также следует существенная зависимость эффективности применения алгоритма сопровождения, основанного на модели Зингера, от величины  $\alpha T$ , определяющей степень корреляции ускорений между измерениями.



**Выводы.** В качестве показателя эффективности алгоритмов сопровождения маневрирующих целей может выступать отношение между дисперсией ошибки оценивания ускорения и априорной дисперсией величины ускорения.

Полученные соотношения позволяют для заданных характеристик внешних воздействий определить целесообразность применения алгоритмов сопровождения маневрирующих целей, основанных на модели Зингера. Их эффективность повышается с увеличением точности наблюдений, уменьшением периода наблюдений и с повышением маневренных характеристик сопровождаемых целей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Singer R. Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets // IEEE Trans. Aerospace & Electronic Systems. – July 1970. – Vol. AES-6. – P. 473 – 483.*
2. *Зингер Р.А., Бенке К.В. Оценка характеристик и выбор фильтров сопровождения в реальном масштабе времени для тактических систем вооружения // Зарубежная радиоэлектроника. – 1972. – № 1. – С. 44 – 60.*
3. *Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении: Пер. с англ. – М.: Связь, 1976. – 496 с.*
4. *Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Радио и связь, 1986. – 352 с.*

Поступила 28.10.2004

**ХИСМАТУЛЛИН Владимир Шайдулович**, канд. техн. наук, профессор кафедры Харьковского университета Воздушных Сил. В 1969 году окончил ВИРТА ПВО им. Говорова. Область научных интересов – теория автоматического управления.

**КУЛИНИЧ Игорь Анатольевич**, адъюнкт Харьковского университета Воздушных Сил. В 2000 году окончил Харьковский военный университет. Область научных интересов – синтез и анализ следящих систем.

---