УДК 519.86

# УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ РЕСУРСОВ ПО КРИТЕРИЮ ВЕРОЯТНОСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

д.т.н., проф. И.В. Чумаченко, к.т.н. В.М. Момот, к.т.н. Н.М. Федоренко

*Рассмотрено решение задачи коррекции уровня вероятностной устойчивости оперативного планирования относительно целеуказания в условиях вариации параметров среды путем изменения запасов дефицитных ресурсов при условии наличия границ плана производства.*

**Постановка проблемы.** В настоящее время для разработки эффективных методов поиска стратегии управления предприятием широко используется аппарат математического программирования, в том числе методы линейного и целочисленного программирования. При этом большое практическое значение приобретают вопросы учета параметрической неопределенности модели. Актуальность данной проблемы обусловлена как наличием неопределенности в исходных данных, которая связана с погрешностями и неточностями в описании характеристик и параметров задачи, так и изменением параметров во времени.

Вопросы анализа стратегий оперативного управления в условиях вариаций параметров среды на основе вероятностного критерия устойчивости и выбора среди них наилучшей стратегии, достигающей области заданного уровня показателей функционирования предприятия, изучались в работах [1, 2]. Однако в ряде случаев вероятность достижения целевой функцией минимального допустимого уровня показателя в рамках реализации рассматриваемых стратегий мала. В этом случае необходимо скорректировать величину запаса привлекаемых ресурсов.

**Анализ литературы**. Классические исследования влияния изменений запасов ресурсов в задаче линейного программирования сосредоточены на получении условий, в пределах которых решение не изменится и получении предельно допустимой величины, при которой дефицитные ресурсы переходят в недефицитные [3, 4]. Однако полученные при этом предельные соотношения не позволяют судить об изменении вероятностного критерия устойчивости относительно целеуказания, характеризующего функционирование организации в условиях параметрических возмущений и возможность коррекции этого показателя. В работе [2] предложен метод нахождения минимальной величины дополнительно привлекаемого ресурса, обеспечивающего требуемый уровень вероятностного критерия устойчивости в условиях параметрической неопределенности. Однако в работе рассмотрен случай коррекции запасов одного вида ресурса, в то время как возможно одновременное изменение запасов всех дефицитных ресурсов. Кроме того, решение получено в предположении возможности неограниченного пополнения запаса ресурса. Однако, как правило, существуют пределы их увеличения, связанные с возможностями производственных мощностей предприятия, с ограниченностью ресурсов на рынке и т.д. Не учтено в работе наличие границ плана производства продукции по отдельным продуктам.

**Цель работы.** Целью данной работы является разработка метода коррекции уровня вероятностной устойчивости предприятия относительно целеуказания в условиях возможных вариаций параметров среды путем одновременного изменения запасов нескольких видов ресурсов в условиях ограничений на величину их наращивания и ограничений плана производства.

**Основной материал исследования.** Рассмотрим задачу выбора оптимальной производственной программы предприятия, обеспечивающей максимум прибыли предприятия $Z$ от выпуска $n$ видов продукции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с учетом возможных вариаций параметров прибыльности. Математическая модель задачи представляет собой задачу линейного программирования. Целевая функция задачи определяется выражением $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$. Решение задачи должно удовлетворять линейным ограничениям вида $AX \le B$ и условиям $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$. Здесь $A = (a_{ij})-$ матрица размерности $m \times n$ представляет собой матрицу технологических коэффициентов, которая описывает объем материально-сырьевых ресурсов вида i, необходимых для выпуска одной единицы продукции вида j. $B = (b_i)-$ вектор-столбец размерности m, представляет собой матрицу запасов используемых в производстве материально-сырьевых ресурсов. Величины $c_j (j = 1, \ldots, n)$ представляют собой прибыль от выпуска и реализации единицы продукции вида j [1 – 4].

В условиях, когда параметры задачи имеют отклонения относительно номинальных значений, целью задачи оперативного планирования является выбор производственной программы предприятия, обеспечивающей получение значения оптимизируемого критерия Z большего или равного минимальному допустимому (запланированному) уровню $Z \ge C$

с заданной вероятностью $P\{Z \ge C\} \ge P^*$ [1, 2]. Здесь $P\{\Psi\}$ – вероятность выполнения условия $\psi$. Оценка $P\{Z \ge C\} \ge P^*$ выступает как мера устойчивости оперативного управления предприятием с учетом возможных вариаций параметров среды относительно целеуказания $Z \ge C$. Отклонения параметров задачи от плановых значений можно считать случайными и имеющими нормальный закон распределения вследствие центральной предельной теоремы. Значение критерия Z при этом также можно считать распределенным в соответствии с нормальным законом [4].

Вариации параметров прибыльности задачи представим в виде $\alpha = \alpha_0 \pm \Delta\alpha$, где значения $\alpha_0$ характеризуют номинальные (невозмущенные) значения параметров, а $\Delta\alpha$ – величину параметрического разброса. Полагаем, что параметрические возмущения задачи при этом определяются соотношением $\Delta\alpha = 3\sigma_\alpha$, где $\sigma_\alpha$ – среднеквадратическое отклонение параметра.

Вероятность попадания величины Z в заданный интервал вещественной оси, может быть рассчитана с помощью интеграла вероятности [1, 2]. Пусть минимальному допустимому уровню вероятности выполнения условия $P\{Z \ge C\} = P^*$ соответствует уровень безразмерного аргумента $t_p$, т.е. $P^* = \Phi(t_p)$. Последнее условие эквивалентно выполнению условия $(C - \nu)/\sigma_Z = t_p$. Здесь $\nu, \sigma_Z$ – соответственно математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение оцениваемого показателя Z. Данное условие определяет линию заданного уровня вероятности $P^*$ выполнения критерия $Z \ge C$. Необходимые для расчета статистические характеристики могут быть рассчитаны следующим образом. В качестве математического ожидания показателя эффективности $\nu$ будем использовать значение критерия оптимизации, соответствующее значениям опорного плана стратегии $x_1, x_2, ..., x_n$ для номинальных параметров задачи. В случае варьирования параметров целевой функции при неизменных значениях других групп параметров задачи величина дисперсии критерия оптимизации $\sigma_Z$ с учетом правила композиции нормальных законов распределения и некоррелированности между собой показателей удельной прибыльности может быть определена по формуле $\sigma_Z = \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{c_j}^2$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – объем выпускаемой продукции соответствующего ассортимента, определяемый рассматриваемой стратегией с номинальными параметрами; $\sigma^2_{c_j}$ – дисперсия показателя удельной прибыльности $c_j$. Таким образом, уравнение линии заданного уровня $P^*$ вероятности выполнения критерия $Z \geq C$. можно переписать в виде

$$3\left(C - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \Bigg/ \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Delta_j c_j x_j\right)^2}\right) \leq t_p .$$

Очевидно, что выполнение условия определяется величиной ограничения уровня целевой функции C, коэффициентами удельной прибыльности $c_j$, величиной разброса параметров $\Delta_j$ и опорным планом задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Реальное управление уровнем вероятностной устойчивости возможно только за счет изменения объемов производства продукции, что в свою очередь связано с изменением запасов дефицитных ресурсов, так как увеличение запасов недефицитных ресурсов не имеет смысла. В этом случае и без того избыточный ресурс становится еще более избыточным, что никак не скажется на полученном ранее решении [4].

При этом возможна ситуация, когда запасы одних ресурсов можно неограниченно наращивать, а другие пополнять только до определенных пределов. Очевидно, при этом предполагается, что в первом случае программа выпуска изделий, сдерживаемая запасами данных ресурсов, может расти неограниченно. Во втором случае, программа ограничивается сверху возможностью наращивания производственных мощностей. Нижняя граница плана выпуска отдельных видов продуктов, определяется договорными обязательствами предприятия с заказчиками. При этом возможно одновременное изменение запасов нескольких или всех дефицитных ресурсов.

Поэтому будем исследовать влияние изменения запасов только дефицитных ресурсов. Обозначим изменение дефицитных ресурсов как $\Delta b_k$, где $k(1 \leq k \leq m)$ – номера дефицитных ресурсов. Система ограничений исходной задачи при этом может быть представлена в матричном виде как $AX \leq B + \Delta B$, где $\Delta B = (\Delta b_k)$ – вектор-столбец размерности m, состоящий из элементов $\Delta b_i = 0$ для недефицитных ресурсов $i \neq k$, $(i = 1, \ldots, m)$ и элементов $\Delta b_k \neq 0$ для дефицитных. Величина $\Delta b_k$ является неизвестной.

Введем в рассмотрение новый вектор $X^1 = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+l})$ размерности $n + l$, образованный из исходного вектора $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и

$l$ элементов $x_{n+q} = \Delta b_k \neq 0$; $(m \geq k \geq 1)$; $(q = 1, \ldots, l)$, характеризующих дополнительно привлекаемые запасы k-ых ресурсов для обеспечения требуемого уровня вероятностной устойчивости задачи оперативного планирования относительно целеуказания. Имеющиеся $l$ ограничений на величину максимальной величины запасов ресурсов можно записать в виде $\Delta b_k \leq \overline{b_k}$, что эквивалентно условию $x_{n+q} \leq \overline{b_k}$ $(q = 1, \ldots, l)$. Ограничения к объемам производственной программы, записываемые в общем виде как $\underline{x_j} \leq x_j \leq \overline{x_j}$, $(j = 1, \ldots, n)$, перепишем в виде системы из $2n$ односторонних неравенств.

С учетом введенного вектора $X^1$ исходную задачу совместно с системой ограничений к величине дополнительно привлекаемых ресурсов и ограничений к производственной программе перепишем в виде $A^1 X^1 \leq B$, где $A^1 = \left(a_{ir}{}^1\right)$ – матрица размерности $(m + 2n + l) \times (n + l)$, которая представляет собой новую матрицу, описывающую объем требуемых материально-сырьевых ресурсов.

Определим минимальный дополнительный запас ресурсов $x_{n+q} = \Delta b_k$ $(q = 1, \ldots, l)$, необходимых для обеспечения заданного уровня вероятностной устойчивости. Очевидно, что в первую очередь должны быть наращены наиболее эффективные ресурсы. В работе [2] предложены критерии оценки эффективности ресурсов. Предъявим к их выбору требования минимизации финансовых затрат на их приобретение.

Исходную задачу сформулируем при этом в виде: найти

$$\min \sum_{q=1}^{l} \alpha_q x_{n+q}$$

в области допустимого множества решений, где $\alpha_q -$ удельная стоимость дополнительно привлекаемых ресурсов, ограниченного линиями

$$\sum_{i=1}^{m+2n+l} a_{ir}{}^1 x_r{}^1 \leq b_i \ \ (r = 1, \ldots, n + l)$$

при условиях

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+l} \geq 0$$

и условии выполнения ограничения

$$\left(C_l - \sum_{j=1}^{n} c_j^l x_j\right) \Bigg/ \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Delta_j^l c_j^l x_j\right)^2}\right) \leq t_{p_l}, \ (j = 1, \ldots, n).$$

Данная задача имеет вид стандартной задачи нелинейного программирования. Для ее решения могут быть использованы соответствующие методы. Применим для решения задачи метод выпуклого программирования [4], приведя для этого все условия к виду: $g_k(X^1) \le 0$, $k = 1, \dots, m + 2n + l$; $x_r \ge 0$, $r = 1, \dots, n + l$, где все функции $g_k(X^1)$, выпуклы по $X^1 = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}\}$. Если функции $g_k(X^1)$ дифференцируемы и выпуклы по $X^1$, то вектор является оптимальным решением задачи оптимизации тогда и только тогда, когда существует такой вектор множителей Лагранжа $\Lambda_0 = \{\lambda_{k0}\}$, что для полученных значений $\{X_{0,}\ \Lambda_0\}$ будут выполняться условия Куна-Таккера.

Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи имеет вид

$$L(X^1, \Lambda) = \sum_{q=1}^{l} \alpha_q x_{n+q} + \sum_{k=1}^{m+2n+l} \lambda_k g_k(X^1).$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности получим в следующем виде:

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_i} \ge 0; \quad \frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_i} x_i^0 = 0; \quad (i = 1, \dots, n + l);$$

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial \lambda_j} = g_i(X) \le 0; \quad \frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial \lambda_j} \lambda_j^0 = 0; \quad (j = 1, \dots, m + 2n + l).$$

Совместное решение $X^{1*}, \Lambda^*$ системы приведенных уравнений и неравенств определяет величину минимального дополнительного запаса ресурсов $x_{n+q} = \Delta b_k (q = 1, \dots, l)$ и параметры соответствующей оптимальной производственной программы $x_1, \dots, x_n$.

Очевидно, что решение возможно только в том случае, если область возможной реализации параметров $X^{доп}$, определяемая системой ограничений $\underline{x_j} \le x_j \le \overline{x_j}$, будет пересекаться с областью требуемого уровня вероятностной устойчивости $P\{Z \ge C\} \ge P^*$, построенной в плоскости тех же параметров. Таким образом, первым шагом, осуществляемым при коррекции вероятностной устойчивости должна быть проверка соответствия области реализации параметров проекта области требуемого уровня вероятностной устойчивости.

Рассмотрим применение предлагаемой методики на следующем примере.

Пусть рассматривается задача выбора оптимальной производственной программы предприятия, задаваемая в виде системы ограничений [2]:

$$\begin{cases} 2x + y \le 21000\,; \\ x + 2y \le 15000\,; \\ x + y \le 15000\,; \\ x \ge 0\,;\ \ y \ge 0\,. \end{cases}$$

Требуется получить параметры эффективной стратегии управления (т.е. его производственную программу), максимизирующие доход предприятия от реализации продукции. Целевая функция при этом имеет вид $f = 2{,}5x + 2y$.

Решаем симплекс-методом исходную детерминированную систему и находим оптимальное решение $x^* = 9000$ изделий, $y^* = 3000$ изделий, $f^{max} = 28500$ грн. Предполагаем, что параметры удельной прибыльности целевой функции задачи оперативного планирования могут отклониться на заданном интервале на 10% от номинальных значений. Уровень ограничения на величину дохода с учетом возможных разбросов соответственно составляет $C = 28000$ грн., а желаемый уровень вероятности выполнения ограничения на величину дохода $P^* = 0{,}8997$. Таким образом, при номинальных значениях параметров задачи величина дохода соответствует заданному уровню ограничения. Рассчитаем вероятность выполнения ограничения к величине дохода в условиях вариации параметров задачи. Оценка вероятности, выполненная по предлагаемой методике, показала, что в рамках заданных исходных данных вероятность устойчивости управления относительно вариаций параметров целевой функции для стратегии, задаваемой величинами $x^* = 9000$ и $y^* = 3000$ изделий, составляет $P\{f^* \ge C\} = 0{,}74$, т.е. полученное детерминированное оптимальное решение не удовлетворяет уровню вероятностного ограничения. Определим величину минимальных дополнительных привлекаемых запасов ресурсов, необходимых для выполнения ограничения к вероятностной устойчивости. При этом условия к объемам производственной программы определим как $x^* \ge 9000$ изделий и $y^* \ge 3000$ изделий. Применим предложенную методику поиска и получим следующее. В случае увеличения запасов первого ресурса на величину $\Delta b_1 = 250$ ед., а $\Delta b_2 = 500$ ед. оптимальная программа выпуска будет $x_1 = 9000$ и $y_1 = 3250$ изделий. При этом величина $P\{f_1^* \ge C\} = 0{,}8997$. То есть привлечение дополнительных запасов ресурсов $\Delta b_1$ или $\Delta b_2$ обеспечивает выполнение заданного уровня вероятностной устойчивости относительно целеуказания.

**Выводы.** В статье рассмотрена методика получения минимальной величины дополнительно привлекаемых ресурсов задачи оперативного планирования в условиях параметрической неопределенности для получения заданного уровня вероятностной устойчивости задачи в условиях наличия ограничений к производственной программе и величине дополнительно привлекаемых ресурсов. Предложенный подход основан на сведении исходной стохастической задачи к детерминированной задаче выпуклого программирования. Использование предлагаемого подхода для выбора стратегии оперативного планирования позволит улучшить эффективность функционирования предприятия с учетом возможных параметрических возмущений.

**Перспективы дальнейших разработок в данном направлении.** За пределами материала данной работы остались вопросы разработки методов решения задачи в условиях уплаты штрафов за недопроизведенную продукцию и регулировки величины штрафа. Данный вопрос будут освещен в других работах авторов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Момот В.М. Вероятностная устойчивость задачи оперативного планирования // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 121 – 127.*
2. *Чумаченко И.В., Момот В.М., Федоренко Н.М. Обеспечение ресурсов оперативного планирования в условиях параметрической неопределенности // Управління проектами та розвиток виробництва. Зб. наук. праць. – Луганськ. – 2004. – № 3 (11). – С. 116 – 122.*
3. *Фомин Г.П. Методы и модели линейного программирования коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 128 с.*
4. *Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций. – М.: Экзамен, 2003. – 448 с.*



*Поступила 20.10.2004*



***ЧУМАЧЕНКО Игорь Владимирович**, д-р техн. наук, зав. кафедрой менеджмента НАУ «ХАИ». В 1977 году окончил ХАИ. Область научных интересов – автоматизированные системы обработки информации и управления.*

***МОМОТ Валерий Михайлович**, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры менеджмента НАУ «ХАИ». В 1969 году окончил ВИРТА ПВО. Область научных интересов – информационные технологии в образовании.*

***ФЕДОРЕНКО Николай Михайлович**, канд. техн. наук, ст. преп. кафедры менеджмента НАУ "ХАИ". В 1971 году окончил физмат ХГПИ. Область научных интересов – информационные технологии.*