

УДК 533.6.011.3:533.6.011.3

О.М. Шийко, П.В. Полениця, І.В. Коплик, О.М. Авдєєва, А.А. Думчиков

Науковий центр бойового застосування РВіА Сумського державного університету, Суми

## СКЛАДОВА ОПОРУ ТИСКУ АЕРОДИНАМІЧНОГО КОЕФІЦІЄНТА ЛОБОВОГО ОПОРУ АРТИЛЕРІЙСЬКОГО СНАРЯДА

Наведено один із методів розрахунку складової опору тиску аеродинамічного коефіцієнта лобового опору артилерійського снаряда. Розглянуто випадки надзвукового і трансзвукового режимів обтікання.

**Ключові слова:** опір тиску, осесиметрична течія, метод характеристик.

### Вступ

Боєприпаси, що використовуються у даний час в артилерії, є тілами обертання із загостреною або затупленою головною частиною. Аеродинамічні характеристики затуплених тіл істотно залежать при заданому типі носка снаряда від ступеня затуплення, під яким умовимося розуміти відношення радіуса основи носка  $r_T$  до радіуса найбільшого перетину тіла  $r_{mid}$ , тобто  $\bar{r} = r_T / r_{mid}$ .

Показане на рис. 1 затуплення є плоским торцем із круглою фаскою. Така форма затуплення найбільш характерна для сучасних снарядів, оснащених підривинками ударної дії. Коли  $r = r_T$ , затуплення набуває сферичної форми; у разі  $r = 0$  поверхня перетворюється на плоский торець.

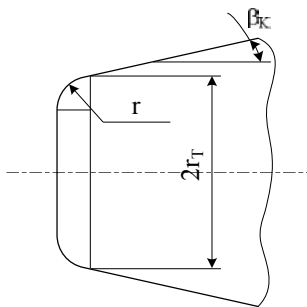


Рис. 1. Носок затуплення тіла обертання

Хвильовий опір затупленого тіла порівняно з загостреним, як правило, зростає. В той же час дослідження [1] показують, що вплив малого затуплення на обтікання всього тіла неоднаковий за різних умов і залежить, зокрема, від швидкості набігаючого потоку. Експериментальні дослідження дозволили встановити, що при помірних числах  $M_\infty$  цей вплив незначний і розповсюджується лише на невеликий окіл тіла. При дуже великих швидкостях вплив затуплення істотно збільшується [1].

Ступінь затуплення і відповідний їй ефект обтікання певним чином узгоджується з методами дослідження аеродинаміки затуплених тіл. Зокрема, якщо розмір затуплення малий ( $2r_T/L \ll 1$ ), то це дослідження можна провести у припущенні, що тіло залишається загостреним, а ефект від затуплення

замінюється дією на обтікаючий потік сил, зосереджених з боку затуплення [1]. Опір профілю з малим затупленням при помірних надзвукових швидкостях можна одержати як результат додавання опору затуплення і опору частини профілю, що залишилася, підрахованої відповідно до теорії обтікання загострених тіл [1].

У роботі [2] наводяться результати проведених випробувань опору тіл обертання з різним ступенем затуплення. Дана оцінка впливу радіуса затуплення носової частини тіла  $r_{II}$  на значення коефіцієнта його хвильового опору. Згідно з [2], опір тіла зростає незначно в результаті наявності затуплення, якщо радіус затуплення менше  $1/4$  максимального радіуса тіла, тобто якщо показник ступеня затуплення  $\bar{r} = r_{II} / r_{mid} < 0,25$ .

Узагальнюючи приведені вище результати і рекомендації, можна зробити висновок про те, що опір тиску  $C_{xp}$  тіла обертання (хвильовий опір при надзвукових швидкостях або ж профільний опір на дозвукових швидкостях) із затупленою головною частиною можна визначити на підставі моделі із загостреною головною частиною, додавши при цьому до одержаного коефіцієнта  $C_{xp}$  складову, що враховує опір затуплення (торцевого, сферичного, комбінованого торцевого із закругленими кромками – фасками і т.п.).

Сучасна аеродинаміка накопичила значний досвід у визначенні аеродинамічних характеристик ізольованих корпусів і крил, а також різноманітних конфігурацій літальних апаратів. Дослідження розподілу тиску, швидкості, густини, тобто так званих «нев'язких» параметрів, може вестися шляхом розв'язання відповідних рівнянь газової динаміки для нев'язкого (ідеального) газу. Зокрема, задача про розподіл сил тиску на тілі обертання при його обтіканні таким малов'язким середовищем, як повітря, може бути вирішена на основі використання згаданих рівнянь. Пояснюється це, з одного боку, достатньо малою товщиною пограничного шару. За такої умови течія в околі тіла характеризується відсутністю значних змін швидкості у будь-якому напрямку і внаслідок цього – значно малими величинами дотичних напруг і кутових швидкостей обер-

тання частинок. Тому з достатнім для практичних розрахунків ступенем наближення можна в цій області вважати газ ідеальним, а рух – таким, що відбувається без обертання, тобто потенційним. З іншого боку, наявність достатньо тонкого пограничного шару мало впливає на розподіл тиску в околі тіла і на його поверхні. Остання обставина пов'язана з тим, що, як відомо [3], тиск у пограничному шарі практично не змінюється по товщині шару. Закони руху в'язкого газу слід у цьому випадку застосовувати лише у вузькій області пограничного шару для обчислення складової опору тертя.

Грунтуючись на вищенаведених міркуваннях, опір тиску тіла обертання із затуплюною головною частиною визначатимемо, попередньо умовно загостривши його шляхом приєднання конуса до носка зрізаної частини корпусу (рис. 2).

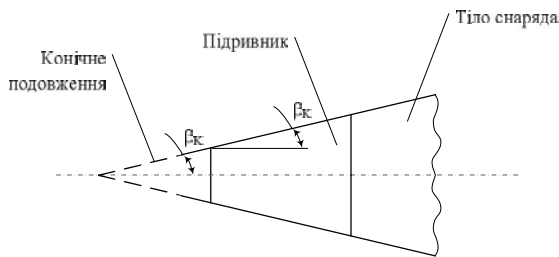


Рис. 2. Перехід до загостреної головної частини

### Основна частина

**1. Надзвуковий режим.** Спочатку розглянемо надзвуковий режим обтікання тіла. Уявимо собі конус із половинним кутом  $\beta_k$  при вершині, що обтікається осесиметричним надзвуковим потоком. Задача полягає у тому, щоб розрахувати течію газу між цим конусом і виникаючим перед конусом стрибком ущільнення, що має вигляд конічної поверхні.

В основу рішення задачі покладемо теорію конічних течій, що дозволяє достатньо спрощено розраховувати обтікання конуса надзвуковим потоком газу. Згідно з цією теорією [3, 4], в достатньо малому околі носка загостреного кругового конуса існує така течія, в якій швидкість, тиск, густина та інші характеристики руху потоку однакові уздовж кожної конічної поверхні з вершиною при вістрі конуса (рис. 3).

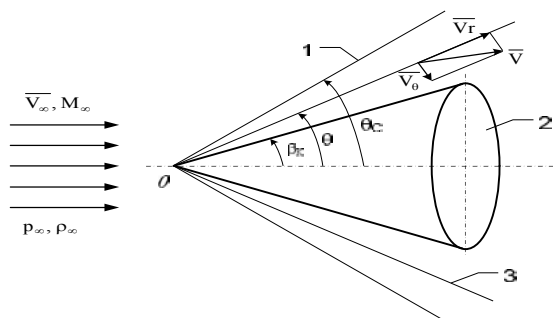


Рис. 3. Складові швидкості на проміжній конічній поверхні

Шукане рішення повинне відповідати осесиметричному конічному полю збуреного потоку, в якому параметри газу зберігаються постійними уздовж прямих, що проведені з вершини конуса і є твірними проміжних конічних поверхонь (у тому числі конічних поверхонь із кутами  $\theta = \theta_c$  і  $\theta = \beta_k$ ).

На підставі вказаної властивості шуканого рішення, будь-яка часткова похідна від параметрів газу по сферичній координаті  $r$  дорівнює нулю. Спільним розв'язанням рівняння нерозривності і рівняння руху стискаємої рідини у сферичних координатах, в яких приймаються рівними нулю в'язкі члени і згадані вище часткові похідні по  $r$ , можна отримати рівняння для складових швидкості при конічній течії [4] у вигляді:

$$\frac{dV_r}{d\theta} = V_\theta; \quad (1)$$

$$\frac{dV_\theta}{d\theta} = \left[ -V_\theta \cdot \text{ctg}\theta + V_r \cdot \left( \frac{V_\theta^2}{a^2} - 2 \right) \right] \cdot \left( 1 - \frac{V_\theta^2}{a^2} \right)^{-1}, \quad (2)$$

$$\text{де } a^2 = \frac{k+1}{2} \cdot (a^*)^2 - \frac{k-1}{2} \cdot (V_r^2 + V_\theta^2);$$

$$(a^*)^2 = \frac{2}{k+1} \cdot a_\infty^2 + \frac{k-1}{k+1} \cdot V_\infty^2; \quad a_\infty = \sqrt{k \cdot \frac{p_\infty}{\rho_\infty}};$$

$\theta_c$  – кут нахилу конічного стрибка ущільнення;  $V_r$  – дотична до конічних поверхонь складова швидкості потоку;  $V_\theta$  – нормальна складова швидкості;  $\theta$  – кут конічних поверхонь;  $a$  – місцева швидкість звуку;  $a^*$  – критична швидкість звуку;  $a_\infty$  – швидкість звуку, обчислена за умов набігаючого потоку;  $V_\infty$ ,  $p_\infty$ ,  $\rho_\infty$  – швидкість, тиск і густина набігаючого потоку;  $k=1,4$  – показник адиабати для повітря.

Розглядаючи систему рівнянь (1), (2), бачимо, що задача про обтікання конуса зводиться до кінематичної задачі, пов'язаної з визначенням поля швидкостей у збуреному потоці біля конуса, тобто з пошуком функцій  $V_r(\theta)$ ,  $V_\theta(\theta)$  для складових швидкості.

За обчисленою швидкістю можна визначити тиск, густину та інші параметри газу. Граничні умови, за яких ведеться чисельне інтегрування диференціальних рівнянь, визначаються умовами течії газу на конусі та умовами, що характеризують параметри газу безпосередньо за стрибком ущільнення.

Гранична умова обтікання конуса полягає у тому, що на його поверхні нормальна складова швидкості дорівнює нулю:

$$V_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = \beta_k. \quad (3)$$

Для стрибка ущільнення маємо умову [3] (рис.4)

$$V_{r_\infty} = V_{cr}; \quad V_{cr} = V_\infty \cdot \cos\theta_c, \quad (4)$$

де  $V_{r_\infty}$  – дотична до поверхні стрибка складова швидкості набігаючого потоку;  $V_{cr}$  – дотична до поверхні стрибка складова швидкості потоку безпосередньо після стрибка.

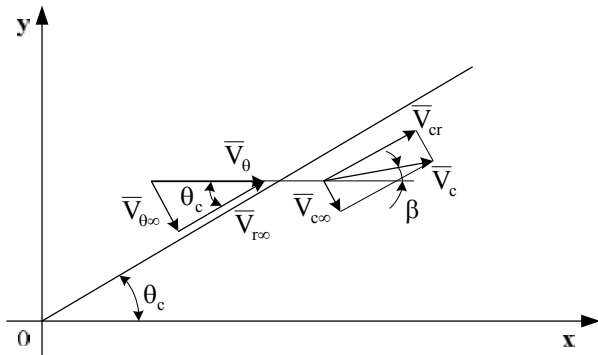


Рис. 4. Схема трикутників швидкостей перед стрибком ущільнення і за ним у разі надзвукового обтікання

Розв'язуючи систему рівнянь (1), (2) методом послідовних наближень із залученням граничних умов (3) і (4), можна визначити кут нахилу стрибка, а також параметри газу за стрибком.

Розглянемо можливий метод рішення задачі. За заданими значеннями  $\theta_c$  та  $V_\infty$  знаходимо радіальну складову швидкості безпосередньо після стрибка ущільнення:

$$V_{cr\infty} = V_{cr} = V_\infty \cos \theta_c. \quad (5)$$

Цю швидкість, однакову як для умов перед стрибком, так і безпосередньо за ним, позначимо  $V_{r1} = V_\infty \cos \theta_1$ , де  $\theta_1 = \theta_c$ . За цим значенням  $V_{cr} = V_{r1}$  вираховуємо нормальну складову швидкості  $V_{c\theta} = V_{\theta 1}$  за стрибком [3]:

$$V_{\theta 1} = \frac{1}{V_\infty \cdot \sin \theta_1} \left( \frac{k-1}{k+1} V_{r1}^2 - a^{*2} \right). \quad (6)$$

Розглянемо поблизу стрибка проміжну кінчну поверхню з нахилом твірної  $(\theta_1 - \Delta\theta_1)$ , де  $\Delta\theta_1$  – мале приращення кута  $\theta$  (рис. 5). Радіальну складову швидкості  $V_{r2}$  на цій поверхні можна вирахувати за рівнянням (1), що записане в кінцевих різницях:

$$V_r - V_{r1} = V_{\theta 1} \cdot \Delta\theta. \quad (7)$$

Прийнявши  $V_r = V_{r2}$  і  $\Delta\theta = \Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_2$ , отримаємо:

$$V_{r2} = V_{r1} + V_{\theta 1} \cdot \Delta\theta_1. \quad (8)$$

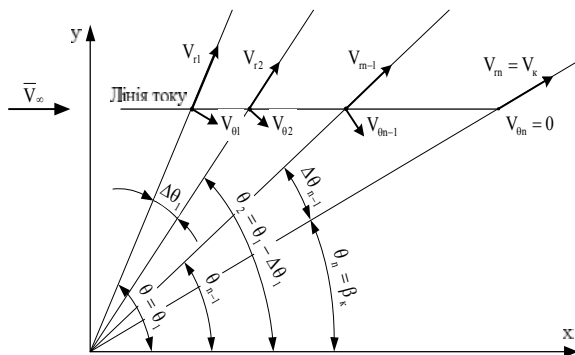


Рис. 5. Схема розрахунку обтікання конусу

Нормальну складову  $V_{\theta 2}$  визначимо з рівняння, що записане в кінцевих різницях:

$$V_\theta - V_{\theta 1} = \left( \frac{dV_\theta}{d\theta} \right)_1 \Delta\theta. \quad (9)$$

Прийнявши  $V_\theta = V_{\theta 2}$  і  $\Delta\theta = \Delta\theta_1$ , знайдемо:

$$V_{\theta 2} = V_{\theta 1} + \left( \frac{dV_\theta}{d\theta} \right)_1 \Delta\theta_1, \quad (10)$$

де похідна  $(dV_\theta/d\theta)_1$  розраховується з рівняння (2) за параметрами на стрибку:

$$\left( \frac{dV_\theta}{d\theta} \right)_1 = \left[ -V_{\theta 1} \cdot \text{ctg} \theta_1 + V_{r1} \left( \frac{V_{\theta 1}^2}{a_1^2} - 2 \right) \right] \left( 1 - \frac{V_{\theta 1}^2}{a_1^2} \right)^{-1},$$

при цьому:

$$a_1^2 = a_c^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} (V_{r1}^2 + V_{\theta 1}^2). \quad (11)$$

Приймаючи за початкові отримані значення  $V_{r2}$  та  $V_{\theta 2}$ , а також  $a_2^2$ , визначене у вигляді:

$$a_2^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} (V_{r2}^2 + V_{\theta 2}^2),$$

можна аналогічним способом знайти параметри  $V_{r3}$ ,  $V_{\theta 3}$ ,  $a_3$  на наступній проміжній поверхні з кутом нахилу твірної:

$$\theta_3 = \theta_2 - \Delta\theta_2 = \theta_1 - \sum_1^{i=2} \Delta\theta_i.$$

Для будь-якої кінчної поверхні з кутом нахилу твірної:

$$\theta_m = \theta_1 - \sum_1^{i=m-1} \Delta\theta_i$$

складові швидкості вираховуються за формулами:

$$V_m = V_{m-1} + V_{\theta m-1} \cdot \Delta\theta_{m-1}; \quad (12)$$

$$V_{\theta m} = V_{\theta m-1} + \left( \frac{dV_\theta}{d\theta} \right)_{m-1} \cdot \Delta\theta_{m-1}, \quad (13)$$

де похідна  $(dV_\theta/d\theta)_{m-1}$  розраховується з рівняння (2) за параметрами  $V_{\theta m-1}$ ,  $V_{m-1}$ ,  $a_{m-1}$  та  $\theta_{m-1} = \theta_{m-2} - \Delta\theta_{m-2}$ .

Розрахунки закінчуються, коли для деякого значення кута проміжного конусу (рис. 5)

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \Delta\theta_{n-1} = \theta_1 - \sum_1^{i=n-1} \Delta\theta_i$$

нормальна складова швидкості  $V_{\theta n}$  обертається в нуль, тобто:

$$V_{\theta n} = V_{\theta n-1} + \left( \frac{dV_\theta}{d\theta} \right)_{n-1} \cdot \Delta\theta_{n-1} = 0. \quad (14)$$

Похідна  $(dV_\theta/d\theta)_{n-1}$  розраховується з рівняння (2) за значенням  $V_{\theta n-1}$ ,  $V_{m-1}$ ,  $a_{n-1}$  на сусідній проміжній кінчній поверхні з кутом нахилу твірної:

$$\theta_{n-1} = \theta_1 - \sum_1^{i=n-2} \Delta\theta_i.$$

У першому наближенні не вдається обрати такий малий кут  $\Delta\theta_{n-1}$ , щоб задовольнялась рівність  $V_{\theta n} = 0$ . Обраному значенню  $\Delta\theta_{n-1}$  відповідає розрахована величина  $V_{\theta n}$ , що змінює свій знак на протилежний порівняно зі знаком  $V_{\theta n}$  на сусідній поверхні з кутом нахилу твірної  $\theta_{n-1}$ . Це вказує на те, що значенню  $V_{\theta n} = 0$  відповідає прирощення кута  $\Delta\theta_{n-1}$ , що менше обраного. Для визначення цього прирощення треба провести операцію інтерполювання, скориставшись рівнянням:

$$\Delta\theta_{n-1} = -V_{\theta n-1} \cdot \left( \frac{dV_{\theta}}{d\theta} \right)_{n-1}^{-1}. \quad (15)$$

За цим значенням  $\Delta\theta_{n-1}$  розраховується швидкість на конусі:

$$V_{\text{тк}} = V_{\text{к}} = V_{m-1} + V_{\theta n-1} \cdot \Delta\theta_{n-1} \quad (16)$$

і кут:

$$\theta_n = \beta_k = \theta_1 - \sum_1^{i=n-1} \Delta\theta_i.$$

Для подальшого вирішення задачі про розподіл параметрів в околі тіла і на його поверхні в області за стрибком ущільнення скористаємося методом характеристик [4].

Основне кінематичне рівняння потенційної течії у циліндричних координатах має вигляд [4]:

$$\begin{aligned} (V_x^2 - a^2) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2V_x V_y \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \\ + (V_y^2 - a^2) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{a^2 V_y}{y} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\phi$  – потенціал швидкості [4],

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y},$$

$$a^2 = \frac{k-1}{2} \left[ V_{\text{max}}^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right];$$

$V_{\text{max}}$  – максимальна швидкість, можлива для даного потоку за умови, що все тепло витрачається на його розгін:

$$V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2}{k-1} \cdot a_{\infty}^2}; \quad (18)$$

$p_0, \rho_0$  – тиск і густина загальмованого потоку.

Тиск і густина в загальмованому набігаючому потоці дорівнюють:

$$p_0 = p_{\infty} \cdot \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_{\infty}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (19)$$

$$\rho_0 = \rho_{\infty} \cdot \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_{\infty}^2 \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

де  $p_{\infty}, \rho_{\infty}, M_{\infty}$  – тиск, густина і число Маха у відповідній точці траєкторії польоту снаряда, дорів-

нюють тиску і густині навколишньої атмосфери і відношенню швидкості польоту снаряда  $V_{\infty}$  до місцевої швидкості звуку  $a_{\infty}$  в навколишній атмосфері відповідно:

$$a_{\infty} = \sqrt{k \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}}. \quad (20)$$

Рівняння (17) використовується тільки для дослідження безвихрових течій. Якщо двомірний газовий потік вихровий, то для його дослідження треба скористатися функцією течії  $\psi$ .

Диференціальне рівняння для функції течії [4] має вигляд:

$$\begin{aligned} (V_x^2 - a^2) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2V_x V_y \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \\ + (V_y^2 - a^2) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a^2 V_x (1 - \bar{V}^2)^{\frac{1}{k-1}} = \\ = \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{V_{\text{max}}^2}{RV} \cdot (1 - \bar{V}^2)^{\frac{k}{k-1}} y (a^2 - V^2) \cdot \frac{dS}{dn}, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $\frac{dS}{dn} = \text{grad } S$  – швидкість зміни ентропії у напрямі

нормалі до лінії течії;  $R$  – універсальна газова стала.

Рівняння (17) для потенціалу швидкостей і (21) для функції течії є неоднорідними нелінійними рівняннями в частинних похідних другого порядку. Розв'язання цих рівнянь  $\phi = \phi(x, y)$  і  $\psi = \psi(x, y)$  геометрично зображаються інтегральними поверхнями у просторі, який визначається координатними системами  $x, y, \phi$  або  $x, y, \psi$ . У цих системах площина  $x, y$  є основою і називається фізичною площиною або площиною незалежних змінних.

Пошук таких рішень в околі деякої початкової кривої  $y = y(x)$ , що задовольняють заданим на цій кривій додатковим умовам, складає зміст задачі Коші. Такими додатковими умовами є значення шуканої функції  $\phi(x, y)$  або  $\psi(x, y)$  і перших похідних  $\phi_x(\psi_x)$  або  $\phi_y(\psi_y)$ , що називаються початковими даними Коші.

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуванні інтегральної поверхні у просторі  $x, y, \phi$  (або  $x, y, \psi$ ), що проходить через деяку задану просторову криву. Проекція цієї кривої на площину  $y, x$  і являє собою початкову криву  $y = y(x)$  на цій площині.

Щоб розглянути задачу Коші, представимо рівняння (17) і (21) у загальному вигляді [5]:

$$Au + 2Bs + Ct + H = 0, \quad (22)$$

де  $u = \phi_{xx}$  (або  $\psi_{xx}$ ),  $s = \phi_{xy}$  (або  $\psi_{xy}$ ),  $t = \phi_{yy}$  (або  $\psi_{yy}$ ) є другими частковими похідними; значення  $A, B$  і  $C$  дорівнюють коефіцієнтам при відповідних других часткових похідних; величина  $H$  визначаєть-

ся вільними членами в рівняннях (17), (21). Знайдемо розв'язок рівняння (22) в околі початкової кривої у вигляді ряду. У деякій точці  $M(x_0, y_0)$  шукана функція є:

$$\begin{aligned} \phi(x_0, y_0) = & \phi(x, y) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ (\Delta x)^n \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} + \frac{n}{1} (\Delta x)^{n-1} \Delta y \frac{\partial^n \phi}{\partial x^{n-1} \partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\Delta x)^{n-2} (\Delta y)^2 \frac{\partial^n \phi}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + (\Delta y)^n \frac{\partial^n \phi}{\partial y^n} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\phi(x, y)$  – значення цієї функції в заданій точці  $N(x, y)$  на початковій кривій;  $\Delta x = x_0 - x$ ;  $\Delta y = y_0 - y$ . Замість  $\phi$  в (23) може застосовуватися функція  $\psi$  – функція току.

Ряд (23) дає шуканий розв'язок, якщо на заданій кривій існують відомі значення функцій  $\phi$  (або  $\psi$ ), а також їх похідні будь-якого порядку. Оскільки на цій кривій перші похідні (позначимо їх  $p = \phi_x$  (або  $\psi_x$ ) і  $q = \phi_y$  (або  $\psi_y$ )) задані, то необхідно додатково знайти на ній другі похідні, а також похідні більш високого порядку. Таким чином, розв'язання задачі Коші пов'язано з відшукуванням умов, за яких можливе визначення старших похідних на заданій кривій. Обмежимося визначенням других похідних. Оскільки цих похідних три ( $u$ ,  $s$  і  $t$ ), то потрібно скласти стільки ж незалежних рівнянь для їх знаходження. Першим з них є рівняння (23), яке задовольняється на початковій кривій. Два інших отримуються з наступних відомих співвідношень для повних диференціалів функцій двох незалежних змінних на цій кривій:

$$\begin{aligned} \partial p &= \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy = u \cdot dx + s \cdot dy; \\ \partial q &= \frac{\partial q}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial q}{\partial y} \cdot dy = s \cdot dx + t \cdot dy. \end{aligned}$$

Таким чином, систему рівнянь для визначення других похідних представимо у формі

$$\begin{cases} Au + 2Bs + Ct + H = 0; \\ dx \cdot u + dy \cdot s + 0 \cdot t + dp = 0; \\ 0 \cdot u + dx \cdot s + dy \cdot t - dq = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Розглянемо випадок, коли крива вибрана таким чином, що на ній головний детермінант системи (24) дорівнює нулю, тобто  $\Delta = 0$ , де

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix},$$

звідси

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0. \quad (25)$$

Відомо, що за умови рівності нулю головного детермінанта  $\Delta$  системи рівнянь (24) на кривій, що виражена рівнянням (25), другі похідні  $u$ ,  $s$  і  $t$  або визначаються неоднозначно, або взагалі не можуть бути визначені через  $\phi$ ,  $p$  і  $q$ .

Розв'язуючи (25) відносно похідної  $dy/dx$ , отримуємо

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = y'_{1,2} = \frac{1}{A} (B \pm \sqrt{B^2 - AC}). \quad (26)$$

Ця рівність визначає нахил дотичної в кожній точці початкової кривої, на якій головний детермінант  $\Delta = 0$ . Неважко побачити, що (26) є диференціальним рівнянням двох сімейств дійсних кривих, якщо  $B^2 - AC > 0$ . Такі криві, в кожній точці яких головний детермінант системи (24) дорівнює нулю, називають характеристиками, а рівняння (25) – характеристичним [5].

З описаного витікає умова, за якої можливе однозначне визначення других похідних на початковій кривій: ніякий елемент дуги цієї кривої не повинен співпадати з характеристиками. Для однозначного визначення вищих похідних, що входять у ряд (23), діє та ж умова  $\Delta \neq 0$ . Отже, якщо  $\Delta \neq 0$ , то всі коефіцієнти ряду (23) однозначно визначаються за даними на початковій кривій.

Таким чином, умова  $\Delta \neq 0$  є необхідною і достатньою для вирішення задачі Коші. Ця задача в теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних має основне значення, і формулу (23) можна використовувати для розрахунку руху параметрів газу. Проте з погляду фізичних застосувань, зокрема розрахунку надзвукових газових течій, більший інтерес становить задача визначення рішення за характеристиками, тобто метод характеристик. Цей метод можна отримати з аналізу задачі Коші, і полягає він у наступному. Припустимо [4], що початкова крива співпадає з однією з характеристик, і уздовж неї дорівнює нулю не тільки головний детермінант системи (24), але і частинні детермінанти. При цьому можна довести [5], що якщо головний і один з часткових детермінантів дорівнюють нулю, тобто

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0, \quad (27)$$

$$A(y'q' - p') - 2Bq' - H = 0, \quad (28)$$

де  $p' = dp/dx$ ,  $q' = dq/dx$ , то рівність нулю решти детермінантів задовольняється автоматично. Згідно з теорією систем алгебраїчних рівнянь [6], рівність нулю головного і всіх частинних детермінантів означає, що рішення системи (24), хоча і неоднозначні, можуть існувати. При цьому, якщо одне з рішень, наприклад для  $u$ , є кінцевим, то кінцеві і рішення для  $s$  і  $t$ .

Рівняння (25) та (28), що визначають умови існування рішень для  $u$ ,  $s$  і  $t$  зуться умовами сумісності. Геометрично перше з цих рівнянь являє собою два сімейства кривих-характеристик у фізичній площині, а друге рівняння – два сімейства кривих-

характеристик у площині годографу швидкості (параметрів  $p$  та  $q$ ). Будь-яке рішення задачі надзвукового руху газу, що знайдено шляхом розв'язання рівнянь-характеристик, однозначно є розв'язанням головного рівняння газової динаміки (17) або (21).

Подальші перетворення рівнянь (25) та (28), що детально наводяться в [1, 4], приводять до системи рівнянь для зв'язаних характеристик двох сімейств у фізичній площині та площині годографу швидкості потоку газу. У випадку безвихрового осесиметричного двомірного потоку ця система має вигляд:

– для характеристик першого сімейства

$$\begin{cases} dy = dx \cdot \operatorname{tg}(\beta + \mu); \\ d(\omega - \beta) - (dx/y) \cdot l = 0; \\ l = \sin \beta \cdot \sin \mu / \cos(\beta + \mu); \end{cases} \quad (29)$$

– для характеристик другого сімейства

$$\begin{cases} dy = dx \cdot \operatorname{tg}(\beta - \mu); \\ d(\omega + \beta) - (dx/y) \cdot m = 0; \\ m = \sin \beta \cdot \sin \mu / \cos(\beta - \mu). \end{cases} \quad (30)$$

Характеристики у фізичній площині мають певний фізичний сенс, якщо визначити кут  $\mu$  між вектором швидкості  $\vec{V}$  в деякій точці потоку (рис. 6) та напрямком характеристики в тій же точці. Видно, що цей кут є кутом Маху, оскільки величина цього кута визначається залежністю [4]:

$$\operatorname{tg} \mu_{1,2} = \pm (M^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Геометрична інтерпретація характеристик першого та другого сімейств у вигляді епіциклоїд певних конфігурацій є і для площини годографа швидкості.

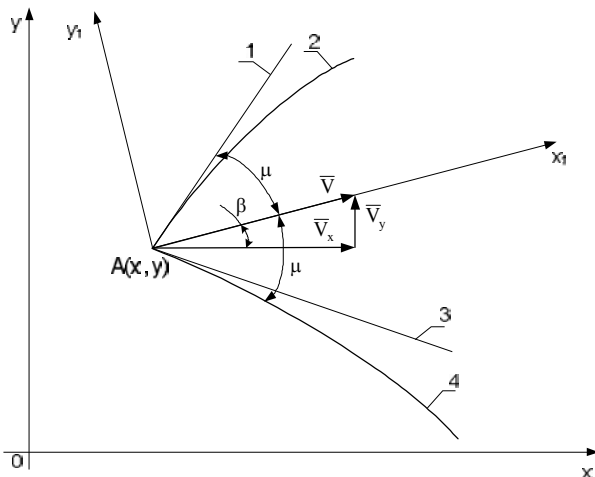


Рис. 6. Схема до визначення фізичного значення характеристик

- 1 – напрямок характеристики першого сімейства в точці А; 2 – характеристика першого сімейства;
- 3 – напрямок характеристики другого сімейства в точці А; 4 – характеристика другого сімейства;
- $\beta$  – кут, який визначає напрям вектора швидкості газу у деякій точці потоку

Величина  $\omega$ , що входить в рівняння характеристик на площині годографа швидкості, є кутом повороту потоку при його ізоентропічному розширенні від умови  $\beta = 0, M = 1$  до стану, що характеризується деяким довільним числом  $M > 1$  і кутом повороту  $\beta = \pm \omega$ . Цей кут можна підрахувати за залежністю [4]:

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \cdot (M^2 - 1)} - \operatorname{arctg}(\sqrt{M^2 - 1}). \quad (31)$$

**2. Послідовність розрахунку складової тиску при надзвуковому обтіканні.** Розглянемо послідовність розрахунку надзвукового обтікання загостреного тіла обертання, розташованого в потоці газу під нульовим кутом атаки. Форма тіла обертання (рис. 7) задана рівнянням твірної  $r = f(x)$ . Відомі також параметри набігаючого потоку (число  $M_\infty$ , тиск  $p_\infty$ , щільність  $\rho_\infty$  і температура  $T_\infty$ ). Якщо товщина тіла обертання така, що воно вносить в потік, який обтікає, великі збурення, тоді розрахунок цього потоку може бути здійснений методом характеристик.

Розрахунок почнемо з визначення кіничного потоку навколо вістря, який в малому околі носка можна замінити конусом (на рис. 7 його границею є точка К). У результаті розрахунку на твірних OD, OA і т.д. проміжних кіничних поверхонь (включаючи утворюючі конусу ОК і стрибка OS) знайдемо швидкість, а також кути  $\omega, \mu$  і  $\beta$ . При цьому кути  $\theta$  нахилу твірних проміжних конусів виберемо довільно, але так, щоб інтервали  $\Delta\theta$  були достатньо малі та забезпечували точність параметрів, що розраховуються.

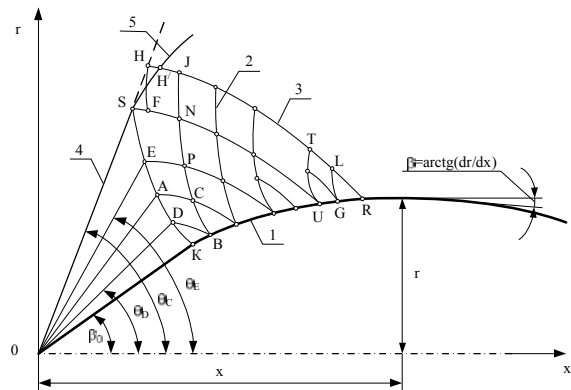


Рис. 7. Схема розрахунку надзвукового тіла обертання за методом характеристик  
1 – твірна тіла обертання; 2 – характеристика першого сімейства; 3 – характеристика другого сімейства; 4 – прямолінійний стрибок; 5 – скривлена ділянка стрибка

Побудуємо сітку характеристик (рис. 7). Спочатку побудуємо елемент KD характеристики першого сімейства, провівши через точку К пряму під кутом  $\mu_K + \beta_K$  (де  $\beta_K = \beta_0$ ) до вісі конуса до пере-

тину в точці D з сусідньою твірною проміжною конічною поверхні, що має кут  $\theta_D$ . У результаті визначаються координати  $x_D$ ,  $r_D$  точки D.

Більшу точність можна отримати при аналітичному визначенні цих координат. Для цього запишемо рівняння для елемента характеристики першого сімейства:

$$r_K - r_D = (x_K - x_D) \cdot \operatorname{tg}(\mu_K + \beta_K) \quad (32)$$

та рівняння твірної

$$r_D = x_D \operatorname{tg} \theta_D. \quad (33)$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо невідомі  $x_D$  і  $r_D$ . Аналогічно розраховуємо координати інших точок характеристики KS першого сімейства, що має вигляд ламаної лінії, яка є межею конічного потоку. При цьому координати  $x_S$ ,  $r_S$  точки S, що лежить на перетині елемента характеристики першого сімейства ES з твірною OS конічного стрибка ущільнення, знайдемо в результаті сумісного розв'язання рівнянь:

$$r_E - r_S = (x_E - x_S) \operatorname{tg}(\mu_E + \beta_E); \quad (34)$$

$$r_S = x_S \operatorname{tg} \theta_S. \quad (35)$$

Отримані вказаним способом координати точок характеристики KS відповідають кутам  $\mu$  і  $\beta$ , які приймаються постійними вздовж кожного з елементів характеристики, що розглядаються, та дорівнюють значенням цих кутів на початку елемента.

Для отримання більш точних даних можна вести розрахунок координат за середніми значеннями кутів  $\mu$  і  $\beta$  між крайніми точками елемента характеристики. Тоді, у частковому випадку, замість рівняння (32) запишемо

$$r_K - r_D = (x_K - x_D) \operatorname{tg} [1/2(\mu_K + \mu_D + \beta_K + \beta_D)], \quad (36)$$

а замість (34)

$$r_E - r_S = (x_E - x_S) \operatorname{tg} [1/2(\mu_E + \mu_S + \beta_E + \beta_S)]. \quad (37)$$

У цих рівняннях  $x_D$ ,  $r_D$  і  $x_S$ ,  $r_S$  є уточненими координатами для точок D і S.

Після того, як визначені вид кривої характеристики KS, швидкості, числа M, кути  $\mu$  і  $\beta$  в точках цієї характеристики, подальше розв'язання задачі зводиться до знаходження поля швидкостей (чисел M) в області між цією характеристикою і твірною обтічного тіла. Для цього застосуємо відповідні співвідношення для характеристик у фізичній площині (площині потоку) і в площині годографа.

Під час вибору співвідношень для характеристик у площині годографа необхідно враховувати, що в області потоку, яка обмежена прямолінійною твірною скачка стрибка OS, характеристикою другого сімейства SU (будується поступово у ході розв'язання задачі) та твірною тіла OU, течія буде безвихровою (ізоентропічною). У сусідній області, що обмежена тією ж характеристикою SU, ділянка-

ми криволінійного стрибка SH і твірної тіла UR, течія буде вихровою (не ізоентропічною).

Для знаходження поля швидкостей на ізоентропічній ділянці течії проведемо через кожен точку характеристики KS елементи характеристики другого сімейства. Одна з них, яка проходить через точку D, перетне стінку в точці B, саме в якій необхідно знайти швидкість. Координати цієї точки визначаються з сумісного розв'язання рівнянь для елемента характеристики першого сімейства

$$r_D - r_B = (x_D - x_B) \cdot \operatorname{tg}(\beta_D - \mu_D) \quad (38)$$

і рівняння твірної тіла

$$r_B = f(x_B). \quad (39)$$

Розв'язуючи рівняння (38) і (39), знаходимо координати точки B ( $r_B$ ;  $x_B$ ). Кут  $\beta_B$  нахилу дотичної до твірної в точці B, що співпадає з причини безвідривного обтікання з кутом нахилу вектора швидкості в цій точці, визначається з рівняння

$$\left( \frac{dr}{dx} \right)_B = \operatorname{tg} \beta_B = \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_B}. \quad (40)$$

Швидкість у точці B знаходиться з (30), коли  $u = r$  (осесиметрична течія):

$$\Delta \omega_D + \Delta \beta_D - \frac{x_B - x_D}{r_D} m_D = 0. \quad (41)$$

У цьому рівнянні прирощення  $\Delta \beta_D = \beta_B - \beta_D$ , тобто є різницею кутів нахилу векторів швидкостей у точках B і D. При цьому відповідно до (40)

$$\beta_B = \operatorname{arctg} \left( \left( \frac{dr}{dx} \right)_B \right). \quad (42)$$

З (41), враховуючи, що  $\Delta \omega_D = \omega_B - \omega_D$ , знаходимо кут

$$\omega_B = \omega_D - (\beta_B - \beta_D) + \frac{x_B - x_D}{r_D} m_D, \quad (43)$$

де відповідно до (30)

$$m_D = \sin \beta_D \sin \mu_D / \cos(\beta_D - \mu_D). \quad (44)$$

Кут  $\omega_D$ , що входить в (44), знаходиться з таблиць у [4] за значенням числа  $M_D$  у точці D. Врахувавши  $\omega_B$  за (43), визначаємо за допомогою тих же таблиць в [4] відповідні величині  $\omega_B$  значення числа  $M_B$  і кута  $\mu_B = \operatorname{arcsin}(1/M_B)$  у точці B. Потім за знайденими числами M можна визначити тиск.

Визначимо спочатку тиск  $p_K$  у точці K, якій відповідає число  $M_K$ :

$$p_K = p_0' \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_K^2 \right)^{-k/(k-1)} = p_0' \pi(M_K), \quad (45)$$

де тиск гальмування за конічним стрибком

$$p_0' = p_0 v_0 \quad (46)$$

визначається за тиском гальмування  $p_0$  до стрибка і значенням функції  $v_0$ , що вираховується за кутом стрибка  $\theta_C$  і числу  $M_\infty$ .

Тиск у точці В дорівнює:

$$p_B = p_0' \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_B^2 \right)^{-k/(k-1)} = p_0' \pi(M_B). \quad (47)$$

Функції  $\pi(M_K)$  і  $\pi(M_B)$  в (45) і (47) визначаються відповідно за значеннями чисел  $M_K$  і  $M_B$  з таблиць у [4].

Коефіцієнти тиску визначаються так:

$$\begin{aligned} \bar{p}_K &= 2(p_K - p_\infty) / (kM_\infty^2 p_\infty); \\ \bar{p}_B &= 2(p_B - p_\infty) / (kM_\infty^2 p_\infty). \end{aligned} \quad (48)$$

Швидкість, температура і щільність визначаються відповідно зі співвідношень:

$$\frac{V_{K(B)}}{V_{\max}} = \left\{ 1 - \left[ \frac{p_{K(B)}}{p_0'} \right]^{(k-1)/k} \right\}^{1/2}; \quad (49)$$

$$\frac{T_{K(B)}}{T_0} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M_{K(B)}^2 \right]^{-1}; \quad (50)$$

$$\frac{\rho_{K(B)}}{\rho_0} = \left[ \frac{T_{K(B)}}{T_0} \right]^{1/(k-1)} \cdot v_0, \quad (51)$$

де  $\rho_0$  і  $T_0$  відшуковуються за параметрами потоку, що набігає [4].

Розраховувавши параметри в точці В, проводимо через неї елемент характеристики першого сімейства до перетину в точці С з прямолінійною ділянкою характеристики другого сімейства, що виходить з точки А (рис. 7). Координати точки С визначаються з розв'язання рівняння елементів АС і ВС характеристик. Рівняння елемента АС характеристики має вигляд:

$$r_A - r_C = (x_A - x_C) \cdot \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A), \quad (52)$$

а рівняння елемента ВС

$$r_B - r_C = (x_B - x_C) \cdot \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B). \quad (53)$$

Сумісне розв'язання цих рівнянь дає координати точки С ( $x_C, r_C$ ). Для того, щоб знайти в цій точці кути  $\beta_C$  і  $\omega_C$ , необхідно скористатися рівняннями для характеристик (29) і (30). Записуючи ці рівняння в кінцевих різницях, отримаємо:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - \frac{x_C - x_B}{r_B} I_B = 0; \quad (54)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A - \frac{x_C - x_A}{r_A} m_A = 0, \quad (55)$$

де відповідно до (29) і (30)

$$\begin{cases} I_B = \sin \beta_B \sin \mu_B / \cos(\beta_B + \mu_B); \\ m_A = \sin \beta_A \sin \mu_A / \cos(\beta_A - \mu_A). \end{cases} \quad (56)$$

Замість чотирьох невідомих  $\Delta\omega_B, \Delta\omega_A, \Delta\beta_B$  і  $\Delta\beta_A$  в рівняннях (54), (55) можна розглядати лише дві невідомі величини  $\Delta\omega_B$  і  $\Delta\beta_B$  (або  $\Delta\omega_A$  і  $\Delta\beta_A$ ).

Рівняння (55) перетворюється до вигляду:

$$\Delta\omega_B + \omega_B - \omega_A + \Delta\beta_B + \beta_B - \beta_A - \frac{x_C - x_A}{r_A} m_A = 0. \quad (57)$$

Розв'язуючи це рівняння сумісно з (54) відносно перемінної  $\Delta\beta_B$ , отримаємо:

$$\Delta\beta_B = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_C - x_A}{r_A} m_A - \right. \quad (58)$$

$$\left. - \frac{x_C - x_B}{r_B} I_B - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A) \right].$$

За знайденим значенням  $\beta_B$  знаходимо з (54) кутове прирощення

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + \frac{x_C - x_B}{r_B} I_B. \quad (59)$$

Абсолютні значення кутів у точці С наступні:

$$\beta_C = \Delta\beta_B + \beta_B, \quad (60)$$

$$\omega_C = \Delta\omega_B + \omega_B.$$

За величиною  $\omega_C$  знаходиться число  $M_C$  і кут збурення  $\mu_C = \arcsin(1/M_C)$ . За числом  $M_C$  у разі необхідності можуть бути знайдені інші параметри: тиск, щільність, температура, швидкість.

Вирахувані таким чином параметри є першим наближенням, тому що вздовж елементів характеристик коефіцієнти  $l$  і  $m$ , а також координати приймалися постійними і рівними їх відповідним значенням у точках А і В. Ці параметри можна уточнити, якщо в рівняння (54) і (55) підставити замість  $I_B, m_A, r_B, r_A$  величини, розраховані як середні між заданими в точках А і В та отриманими в точці С у першому наближенні. Для цих середніх величин маємо співвідношення:

$$\begin{cases} I'_B = \sin \beta'_B \sin \mu'_B / \cos(\beta'_B + \mu'_B); \\ m'_A = \sin \beta'_A \sin \mu'_A / \cos(\beta'_A - \mu'_A); \end{cases} \quad (61)$$

$$r'_B = (r_B + r_C) / 2, \quad r'_A = (r_A + r_C) / 2, \quad (62)$$

де

$$\begin{cases} \beta'_B = (\beta_B + \beta_C) / 2; \quad \mu'_B = (\mu_B + \mu_C) / 2; \\ \beta'_A = (\beta_A + \beta_C) / 2; \quad \mu'_A = (\mu_A + \mu_C) / 2. \end{cases} \quad (63)$$

Продовжуючи аналогічні розрахунки, можна визначити параметри в усіх точках другого ряду, включаючи точку N, що лежить на перетині елементів PN характеристики першого сімейства і SN характеристики другого сімейства, що проведена з кінця прямолінійного конічного стрибка ущільнення.

Подальший розрахунок полягає у тому, щоб знайти параметри в точці перетину елементів характеристик першого сімейства, яка проведена через точку N, з продовженням стрибка за точкою S. Практично з метою отримання кращого наближення характеристику проводять не через точку N, а через точку F, розташовану між точками N і S (рис. 7). Координати  $x_F, u_F$  точки F вибираються таким чином, щоб елемент FN характеристики, що прилягає до стрибка, був достат-



ньо малим та міг розглядатися у вигляді прямолінійної ділянки. Параметри в точці F ( $\omega$ , M,  $\mu$ ,  $\beta$ ) розраховують за відомими їх значеннями в точках S і N лінійної інтеполяції. Наприклад,

$$\omega_F = \omega_S + (\omega_N - \omega_S) \frac{x_F - x_S}{x_N - x_S}. \quad (64)$$

Рівняння елемента FH характеристики першого сімейства буде

$$r_F - r_H = (x_F - x_H) \operatorname{tg}(\beta_F + \mu_F). \quad (65)$$

Розв'язуючи це рівняння сумісно з рівнянням прямолінійної твірної стрибка  $r_H = x_H \operatorname{tg} \theta_C$ , визначимо координати  $x_H$ ,  $r_H$  та знайдемо тим самим у першому наближенні положення точки H на стрибку ущільнення. Ці координати повинні бути уточнені, тому що реальний стрибок за точкою S буде викривлений. Дійсно, характеристика першого сімейства (ES, FH та ін.) є за своєю природою хвилями розрідження. Зустрічаючи стрибок ущільнення, ці хвилі зменшують його інтенсивність і, отже, нахил, в результаті чого стрибок скривлюється.

Течія за таким стрибком ущільнення буде вихровою (неізоентропічною), тому для визначення швидкості в точці H необхідно використовувати рівняння для елемента FH характеристики першого сімейства, яке враховує змінення ентропії за криволінійним стрибком [4]. Приймаючи у цьому рівнянні  $u_F = r_F$  та розв'язуючи його відносно  $\Delta\beta_F$ , отримаємо залежність:

$$\Delta\beta_F = \frac{\omega_F - \omega_S + \frac{x_H - x_F}{r_F} I_F - \frac{x_H - x_F}{kR} \frac{\Delta S}{\Delta n} c_F}{\left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_S - 1}, \quad (66)$$

де похідна  $(d\omega/d\beta)_S$  та коефіцієнти  $I_F$ ,  $c_F$  розраховуються наступним чином [4]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_S &= \left(\frac{dM}{d\beta}\right)_S \cdot \left(\frac{d\omega}{dM}\right)_S; \\ \frac{d\omega}{dM} &= \sqrt{M^2 - 1} \left[ M \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{-1}; \\ \frac{dM}{d\beta} &= -M_2 \left[ \operatorname{ctg}(\theta_c - \beta_c) \left( \frac{d\theta_c}{d\beta_c} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_2^2}{2(1-\delta)} \sin^2(\theta_c - \beta_c) \frac{d}{d\beta_c} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right]; \\ \frac{d}{d\beta_c} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) &= \\ &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left\{ \frac{d\theta_c}{d\beta_c} \cdot \left[ \frac{1}{\sin \theta_c \cos \theta_c} - \frac{1}{\sin(\theta_c - \beta_c) \cos(\theta_c - \beta_c)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin(\theta_c - \beta_c) \cos(\theta_c - \beta_c)} \right\}; \end{aligned}$$

$$\frac{d\theta_c}{d\beta_c} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times$$

$$\times \left[ 2 \cos^2(\theta_c - \beta_c) \left( 1 - \delta \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{\cos^2(\theta_c - \beta_c)}{\cos^2 \theta_c} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]^{-1};$$

$$I_F = \sin \beta_F \sin \mu_F / \cos(\beta_F + \mu_F);$$

$$c_F = \sin^2 \mu_F \cos \mu_F / \cos(\beta_F + \mu_F).$$

До формули (66) входить величина  $\Delta S$ , що визначає змінення ентропії під час переходу від точки H до точки F. Розрахунки у першому наближенні припускають, що точка H розташована на продовженні прямолінійної твірної стрибка, тому можна було б прийняти змінення ентропії рівним нулю, тобто  $\Delta S = 0$ . Однак це припущення знижує точність розрахунків, тому що в дійсності точка H розташована на викривленій ділянці стрибка (H'). Кращі результати виходять, якщо прийняти, що ентропія (або тиск гальмування) у точці H не дорівнює її значенню в точці F. Як показують розрахунки та експериментальні дослідження, суттєвий вплив вихрового характеру руху за криволінійним стрибком ущільнення спостерігається лише при великих швидкостях обтікання.

Використовуючи наведений метод побудови сітки характеристик в області надзвукової течії за стрибком ущільнення, послідовно визначаємо параметри в усіх вузлах сітки, включаючи вузли на верхній обтічного тіла.

Подальше визначення коефіцієнта тиску  $C_{Xp}$  в області надзвукових течій пов'язано з інтегруванням знайденого тиску по бічній поверхні тіла  $S_{бок}$

$$C_{Xp} = \frac{1}{S_{mid}(S_{бок})} \int \bar{p} \cdot \cos(\bar{n}, \bar{V}_\infty) \cdot dS_{бок},$$

де  $\bar{p} = (p - p_\infty)/q$  – коефіцієнт тиску;  $\cos(\bar{n}, \bar{V}_\infty)$  – косинус кута між  $\bar{V}_\infty$  і внутрішньою нормаллю  $\bar{n}$  до поверхні тіла в даній точці;  $q = 0,5 \rho_\infty V_\infty^2$  – швидкісний натиск;  $S_{mid}$  – площа міделевого перетину тіла.

Метод розрахунку опору тиску при надзвуковому обтіканні (хвильового опору), заснований на використанні характеристик, має обмеження по числу  $M_\infty$  набігаючого потоку.

При числах Маха  $M_\infty$  близьких до одиниці (залежно від подовження тіла) в області за стрибком ущільнення течія стає транзвукова, що призводить до виродження гіперболічності рівняння для потенціалу швидкостей.

Характеристики першого і другого сімейства стають паралельними (при  $V=a$ ), а рівняння еліптичним, або (при  $V < a$ ) характеристики стають уявними, а рівняння – параболічним. У цих випадках метод характеристик рішення не дає.

**3. Профільний опір.** З метою наближеної оцінки опору тиску в області дозвукових та трансзвукових чисел Маху набігаючого потоку  $M_\infty$  скористаємося методикою, викладеною в [1].

Підвищення тиску на дозвукових швидкостях в районі головної частини снаряда можна врахувати введенням коефіцієнта профільного опору (при  $M_\infty \leq 0,8$ ):

$$C_{Xпр} = k_\phi \cdot C_{Xf}, \quad (67)$$

де  $k_\phi = 1,86 - 0,175 \cdot \lambda_\phi + 0,01 \cdot \lambda_\phi^2$ ;  $\lambda_\phi = \lambda_k \cdot \sqrt{1 - M_\infty^2}$  – ефективне подовження снаряда;  $\lambda_k = L/d_{mid}$  – подовження снаряда;  $L$  – довжина снаряда;  $d_{mid}$  – діаметр міделя.

Тоді:

$$C_{Xр} = (C_{Xпр} - C_{Xf}) = C_{Xf} (k_\phi - 1).$$

Для оцінки опору тиску при  $M_\infty = 1,0$  можна скористатися експериментальною залежністю, приведеною в [1]:

$$C_{Xр} = \frac{D(K)}{\lambda_{эф}^2}, \quad (68)$$

де  $K = \lambda_{эф}^2 \cdot (M_\infty^2 - 1)$ . При  $M_\infty = 1,0$  маємо, що  $K = 0$ .

На основі даних, наведених в [1]:

$$D(K)_{K=0} = 2,0.$$

У такому випадку:

$$C_{Xр} = \frac{2}{\lambda_{эф}^2},$$

де  $\lambda_{эф} = \lambda_\Gamma + \lambda_{кр} + \Delta\lambda_\Pi$ ;  $\lambda_\Gamma = L_\Gamma / d_{mid}$ ;  $\lambda_{кр} = L_{ХВ} / d_{mid}$ ;  $\Delta\lambda_\Pi = 3,0$  (в середньому);  $L_\Gamma$ ,  $L_{ХВ}$  – довжина головної та хвостової частин снаряда.

Залежність (68) може бути використана і для інших значень трансзвукових швидкостей:

$$M_\infty \approx 1,0.$$

## Висновки

У роботі розроблено метод розрахунку складової опору тиску аеродинамічного коефіцієнта лобового опору артилерійського снаряда. Розглянуто випадки надзвукового і трансзвукового обтікання потоку.

У разі надзвукового обтікання запропоновано спосіб розрахунку коефіцієнта опору тиску методом характеристик.

При трансзвуковому режимі розрахунок запропоновано проводити з використанням коефіцієнта профільного опору.

Цей метод розрахунку дозволяє теоретично оцінити складову опору тиску артилерійського снаряда за його кресленнями без проведення випробувань у аеродинамічній трубі.

## Список літератури

1. Аэродинамика ракет / под ред. проф. Н.Ф. Краснова. – М.: Высшая школа, 1968. – 772 с.
2. Чжен П. Отрывные течения. Т. 2. / П. Чжен. – М.: Мир, 1973. – 279 с.
3. Фабрикант Ф.Я. Аэродинамика / Ф.Я. Фабрикант. – М.: Наука, 1964. – 816 с.
4. Краснов Н.Ф. Аэродинамика: учебн. для втузов / Н.Ф. Краснов. – М.: Высшая школа, 1971. – 632 с.
5. Франкль Ф.И. Газодинамика тонких тел / Ф.И. Франкль, Е.А. Карпович. – М.: Гостехиздат, 1948.
6. Обшая алгебра. Т.1 / под ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – 592 с.

Надійшла до редколегії 4.03.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.М. Фоменко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## СОСТАВЛЯЮЩАЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЮ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

А.Н. Шийко, П.В. Поленица, И.В. Коплык, Е.Н. Авдеева, А.А. Думчиков

Приведен один из методов расчета составляющей сопротивления давлению аэродинамического коэффициента лобового сопротивления артиллерийского снаряда. Рассмотрены случаи сверхзвукового и трансзвукового режимов обтекания.

**Ключевые слова:** сопротивление давлению, осесимметрическое течение, метод характеристик.

## COMPONENT OF PRESSURE OF AXIAL-FORCE COEFFICIENT OF AN ARTILLERY SHELL

A.N. Shiyko, P.V. Polenitsa, I.V. Kopylyk, E.N. Avdeeva, A.A. Dumchikov

The order of calculations of a component of pressure of axial-force coefficient of an artillery shell was described. Cases of supersonic and transonic regime of flowing are stated.

**Keywords:** component of pressure, axial-symmetric flow, characteristic method.