УДК 62-50

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КРИТЕРИЯ ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИХ УПРАВЛЕНИЯХ

д.т.н., проф. В.Д. Дмитриенко, к.т.н. В.И. Носков, Н.В. Мезенцев

*Предлагаются новые модификации метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы для случая нелинейного вхождения управлений в систему дифференциальных уравнений, описывающих объект.*

**Постановка проблемы.** Некоторые методы синтеза регуляторов для сложных объектов можно рассматривать как рациональный подход к поиску в пространстве возможных решений оптимальных структур и параметров систем управления, когда лучшая система получается в результате итерационного процесса поиска вида и коэффициентов функционала. С помощью такого функционала пытаются учесть различные, часто противоречивые и трудно формулируемые особенности протекания процессов в различных режимах функционирования сложных технических объектов. К числу таких методов принадлежит и метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы (АКОР), позволяющий синтезировать регуляторы для объектов, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка с линейно входящими управлениями [1 – 6]. Несмотря на то, что математические модели с нелинейно входящими управлениями могут быть различными способами преобразованы к моделям с линейно входящими управлениями, все эти способы имеют определенные недостатки, часто приводящие к ухудшению синтезируемых систем управления [3]. В связи с этим актуальна разработка методов синтеза регуляторов по критерию обобщенной работы и для объектов, математические модели которых содержат нелинейно входящие управления.

**Анализ последних достижений и публикаций.** В настоящее время известен ряд публикаций, связанных с разработкой методов синтеза регуляторов для нескольких частных видов математических моделей с нелинейно входящими управлениями [4 – 8] . Большинство этих моделей связаны с тяговым асинхронным электроприводом, который питается

© д.т.н., проф. В.Д. Дмитриенко, к.т.н. В.И. Носков, Н.В. Мезенцев, 2004

напряжением синусоидальной или несинусоидальной формы, и управления (амплитуда $u_1$ и частота $u_2$ напряжения) связаны одним из выражений вида:

$$
\begin{gathered}
u_1 \sin(u_2 t + \psi_0)\,; \\
\sum_{j=1}^{m} u_j \sin(g(j) u_{(m+1)} t + \psi(j))\,; \\
u_1 \varphi(u_2 t)\,; \qquad (1) \\
\sum_{j=1}^{m} u_j \varphi_j (u_{(m+1)} t),
\end{gathered}
$$

где $\psi_0$ – константа, задающая фазу синусоидального напряжения;

$u_j\,(j = \overline{1,\,m})$ – амплитуды m гармоник питающего напряжения;

$g(j)\,(j = \overline{1,\,m})$ – константы, с помощью которых учитываются m гармоник питающего напряжения;

$\psi(j)$ – константа, задающая фазу j-й гармоники питающего напряжения;

$\varphi, \varphi_j\,(j = \overline{1,\,m})$ – функции, описывающие форму несинусоидального напряжения.

Выражения (1) описывают весьма узкий класс объектов с нелинейно входящими управлениями.

**Целью статьи** является расширение области применения метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы на объекты более общего вида.

**Исследования и результаты.** Одна из общих формулировок основной теоремы АКОР следующая [2, 5].

***Теорема 1.*** Пусть объект описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$
\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t) u_j\,, \qquad (2)
$$

тогда оптимальным в смысле минимума функционала

$$
\begin{gathered}
I = V_з[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1, \ldots, X_n, t)dt + \\
+ \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_j}{k_j}\right)^q dt + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_j \sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\right)^p dt, \qquad (3)
\end{gathered}
$$

являются управления

$$u_j = -k_j^p \left( \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \right)^{p-1}, \tag{4}$$

где V – решение линейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial X_i} f_i = -Q, \tag{5}$$

при граничном условии

$$V\left[X_1(t_2),\ \ldots,\ X_n(t_2),\ t_2\right] = V_з\left[X_1(t_2),\ \ldots,\ X_n(t_2),\ t_2\right]. \tag{6}$$

где $X_i (i = \overline{1,\ n})$ – фазовые координаты объекта управления;

$f_i,\ \varphi_{ij} (i = \overline{1,\ n},\ j = \overline{1,\ m})$ – непрерывные заданные функции;

$V_з\left[X_1(t_2),\ \ldots,\ X_n(t_2),\ t_2\right]$ – положительно определенная непрерывная функция, задающая точность приведения объекта управления в момент времени $t_2$ в заданную точку фазового пространства;

$Q(X_1,\ \ldots,\ X_n,\ t)$ – положительно определенная непрерывная функция, задающая требования к качеству переходных процессов объекта по фазовым координатам в интервале времени управления $[t_1,\ t_2]$;

$p,\ q$ – положительные числа, удовлетворяющие условиям: $1/p + 1/q = 1$;

$X^p,\ X^q$ – четные функции X; $k_j (j = \overline{1,\ m})$ – заданные числа;

$u_j (j = \overline{1,\ m})$ – управления.

Из вида уравнений (2) теоремы 1 следует, что метод АКОР можно использовать для объектов, описываемых с помощью систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые управления $u_j$ входят линейно. Для расширения области применения метода АКОР предлагается новая модификация метода АКОР для случая p = q = 2 и нелинейно входящих управлениях, которая основывается на следующей теореме.

***Теорема 2***. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1,\ \ldots,\ X_n,\ t) = 2\sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1,\ \ldots,\ X_n,\ t) u_{1j} u_{2j}, \tag{7}$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_з[X_1(t_2),\ \ldots,\ X_n(t_2),\ t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1,\ \ldots,\ X_n,\ t) dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{u_{1j}}{k_{1j}} \right)^2 dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}\right)^2 dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2 dt+ \tag{8}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2 dt,$$

являются управления

$$u_{1j\text{опт}}=-k_{1j}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right),\quad j=\overline{1,\,m}; \tag{9}$$

$$u_{2j\text{опт}}=-k_{1j}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right),\quad j=\overline{1,\,m}, \tag{10}$$

где V – решение уравнении (5) при граничном условии (6).

***Доказательство.*** Полная производная функции V в силу уравнений объекта (7) и уравнения в частных производных (5) равна

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\frac{dX_i}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(2\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}-f_i\right)=$$
$$=-Q+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}\right). \tag{11}$$

Интегрируя выражение (11) в интервале времени $[t_1,\,t_2]$, получим

$$V\left[X_1(t_2),\,\ldots,\,X_n(t_2),\,t_2\right]-V\left[X_1(t_1),\,\ldots,\,X_n(t_1),\,t_1\right]=-\int_{t_1}^{t_2}Q dt+$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}\right)dt. \tag{12}$$

Функционал (8) с учетом соотношения (12) преобразуется к виду

$$I=V[X_1(t_1),\,\ldots,\,X_n(t_1),\,t_1]+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(2\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}\right)^2 dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}\right)^2 dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2 dt+ \tag{13}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2 dt.$$

Поскольку имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}u_{1j}u_{2j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}+k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2$$

и

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}u_{1j}u_{2j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}+k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2,$$

то функционал (13) можно записать в виде

$$I=V[X_1(t_1),\ldots,X_n(t_1),\,t_1]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}+k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2 dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}+k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2 dt\ .$$

Так как подинтегральные выражения неотрицательны, то их минимальные значения могут быть равны нулю, что и выполняется, если управления $u_{1j}(j=\overline{1,m})$ определяются соотношением (9), а управления $u_{2j}(j=\overline{1,m})$ – соотношением (10).

Заметим, что функционал (8) с учетом соотношений (9) и (10) может быть записан в более компактной и понятной форме:

$$I=V_з[X_1(t_2),\ldots,X_n(t_2),\,t_2]+\int_{t_1}^{t_2}Q(X_1,\ldots,X_n,t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{u_{1j}^2+u_{1jопт}^2}{k_{1j}^2}dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{u_{2j}^2+u_{2jопт}^2}{k_{2j}^2}dt$$

или

$$I=V_з[X_1(t_2),\ldots,X_n(t_2),\,t_2]+\int_{t_1}^{t_2}Qdt+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1j}^2}{k_{1j}^2}+\frac{u_{2j}^2}{k_{2j}^2}\right)dt\ .$$

Обобщим теорему 2 на случай, когда используются не сами управления, а некоторые функции от них.

***Теорема 3.*** Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t)\psi_{ij}(u_{1ij})\psi_{ij}(u_{2ij}), \tag{14}$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2),\ t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right)dt, \tag{15}$$

являются управления

$$u_{1ij} = -k_{1ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{1ij}; \tag{16}$$

$$u_{2ij} = -k_{2ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{2ij}, \tag{17}$$

где V – решение уравнения (5) при граничном условии (6).

***Доказательство.*** Полная производная функции V в силу уравнений объекта (14) и уравнения (5) равна

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\frac{dX_i}{dt} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij} - f_i\right) = \\ &= -Q + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}. \end{aligned} \tag{18}$$

Интегрируя выражение (18) в интервале времени $[t_1, t_2]$, получим

$$\begin{aligned} V\big[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2),\ t_2\big] - V\big[X_1(t_1), \ldots, X_n(t_1),\ t_1\big] = -\int_{t_1}^{t_2} Q dt + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}dt. \end{aligned} \tag{19}$$

Функционал (15) с учетом соотношения (19) преобразуется к виду

$$I=V[X_1(t_1),\ \ldots,\ X_n(t_1),\ t_1]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}dt+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2}+\frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right)dt. \tag{20}$$

Поскольку имеем

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}}+k_{1ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{1ij}\right]^2=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2}+\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}+\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2}\right]=2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}$$

и

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}}+k_{2ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{2ij}\right]^2=2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij},$$

то функционал (20) можно записать в виде

$$I=V[X_1(t_1),\ \ldots,\ X_n(t_1),\ t_1]+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}}+k_{1ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{1ij}\right]^2dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}}+k_{2ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{2ij}\right]^2dt. \tag{21}$$

Если управления $u_{1ij}, u_{2ij}$ определяются соответственно соотношениям (16) и (17), то подинтегральные выражения в функционале (20) обращаются в нуль и он принимает минимальное значение. Следовательно, теорема доказана.

Нетрудно видеть, что выражения (1) являются частными случаями правой части системы уравнений (14). Это наглядно показывает, что теорема 3 является обобщением ранее полученных результатов.

**Выводы.** Таким образом, доказательство теорем 2 и 3 расширило область возможного применения метода АКОР на объекты, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида (7) и (14), т.е. на объекты, в которых управляющие воздействия входят в виде произведений или в виде суммы произведений функций, определяемых управлениями. В дальнейшем предполагается обобщение полученных результатов и разработка численных методов для синтеза конкретных систем управления.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с.*
2. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. – М.: Наука, 1977. – 272 с.*
3. *Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.*
4. *Эволюционные методы компьютерного моделирования / А.Ф. Верлань, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Корсунов, В.А. Шорох. – К.: Наук. думка, 1992. – 256 с.*
5. *Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / В.И. Носков, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Заполовский, С.Ю. Леонов. – Х.: ХФИ Транспорт Украины, 2003. – 248 с.*
6. *Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Носков В.И., Баленко А.И. Равновесные математические модели динамических процессов электропривода переменного тока // Научные ведомости БелГУ. Серия "Информатика, прикладная математика, управление". – Т. 1. – Вып. 1(19). – Белгород: БелГУ, 2004. – С. 52 – 64.*
7. *Даниленко А.Ф., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И. Математические модели оптимальных систем управления тяговым асинхронным приводом тепловозов // Электронное моделирование. – 1991. – Т. 13. – №2. – С. 40 – 44.*
8. *Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Марченко В.С. Аналитическое конструирование регуляторов для тяговых асинхронных двигателей // Тез. докл. Всесоюзн. н.-т. конф. "Проблемы подвижного состава с асинхронными тяговыми двигателями". – М.: КМС ВСНТО, 1986. – С. 120 – 122.*



*Поступила 5.11.2004*



***ДМИТРИЕНКО Валерий Дмитриевич,*** *доктор технических наук, профессор Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". В 1971 году окончил Харьковский политехнический институт. Область научных интересов – моделирование сложных объектов и искусственный интеллект.*

***НОСКОВ Валентин Иванович,*** *кандидат технических наук, главный конструктор ГП "ЭЛЕКТРОТЯЖМАШ". В 1965 году окончил Харьковский авиационный институт. Область научных интересов – тяговый электропривод подвижного состава железных дорог, математическое моделирование.*

***МЕЗЕНЦЕВ Николай Викторович****, аспирант Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". В 2003 году окончил Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт". Область научных интересов – математическое моделирование, системы управления электроприводами.*