УДК 62-50

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КРИТЕРИЯ ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИХ УПРАВЛЕНИЯХ

д.т.н., проф. В.Д. Дмитриенко, к.т.н. В.И. Носков, Н.В. Мезенцев

Предлагаются новые модификации метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы для случая нелинейного вхождения управлений в систему дифференциальных уравнений, описывающих объект.

Постановка проблемы. Некоторые методы синтеза регуляторов для сложных объектов можно рассматривать как рациональный подход к поиску в пространстве возможных решений оптимальных структур и параметров систем управления, когда лучшая система получается в результате итерационного процесса поиска вида и коэффициентов функционала. С помощью такого функционала пытаются учесть различные, часто противоречивые и трудно формулируемые особенности протекания процессов в различных режимах функционирования сложных технических объектов. К числу таких методов принадлежит и метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы (АКОР), позволяющий синтезировать регуляторы для объектов, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка с линейно входящими управлениями [1 – 6]. Несмотря на то, что математические модели с нелинейно входящими управлениями могут быть различными способами преобразованы к моделям с линейно входящими управлениями, все эти способы имеют определенные недостатки, часто приводящие к ухудшению синтезируемых систем управления [3]. В связи с этим актуальна разработка методов синтеза регуляторов по критерию обобщенной работы и для объектов, математические модели которых содержат нелинейно входящие управления.

Анализ последних достижений и публикаций. В настоящее время известен ряд публикаций, связанных с разработкой методов синтеза регуляторов для нескольких частных видов математических моделей с нелинейно входящими управлениями [4 – 8] . Большинство этих моделей связаны с тяговым асинхронным электроприводом, который питается напряжением синусоидальной или несинусоидальной формы, и управления (амплитуда u_1 и частота u_2 напряжения) связаны одним из выражений вида:

$$u_1 \sin(u_2 t + \psi_0);$$
$$\sum_{j=1}^{m} u_j \sin(g(j) u_{(m+1)} t + \psi(j));$$
$$u_1 \varphi(u_2 t); \qquad (1)$$
$$\sum_{j=1}^{m} u_j \varphi_j (u_{(m+1)} t),$$

где ψ_0 – константа, задающая фазу синусоидального напряжения;

$u_j \, (j = \overline{1, m})$ – амплитуды m гармоник питающего напряжения;

$g(j) \, (j = \overline{1, m})$ – константы, с помощью которых учитываются m гармоник питающего напряжения;

$\psi(j)$ – константа, задающая фазу j-й гармоники питающего напряжения;

$\varphi, \varphi_j \, (j = \overline{1, m})$ – функции, описывающие форму несинусоидального напряжения.

Выражения (1) описывают весьма узкий класс объектов с нелинейно входящими управлениями.

Целью статьи является расширение области применения метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы на объекты более общего вида.

Исследования и результаты. Одна из общих формулировок основной теоремы АКОР следующая [2, 5].

Теорема 1. Пусть объект описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t) u_j, \qquad (2)$$

тогда оптимальным в смысле минимума функционала

$$I = V_3[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1, \ldots, X_n, t) dt +$$
$$+ \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_j}{k_j} \right)^q dt + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} \left(k_j \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \right)^p dt, \qquad (3)$$

являются управления

$$u_j = -k_j^p \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \right)^{p-1}, \tag{4}$$

где V – решение линейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial X_i} f_i = -Q, \tag{5}$$

при граничном условии

$$V[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] = V_з[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2]. \tag{6}$$

где $X_i (i = \overline{1, n})$ – фазовые координаты объекта управления;

$f_i, \varphi_{ij} (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$ – непрерывные заданные функции;

$V_з[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2]$ – положительно определенная непрерывная функция, задающая точность приведения объекта управления в момент времени t_2 в заданную точку фазового пространства;

$Q(X_1, \ldots, X_n, t)$ – положительно определенная непрерывная функция, задающая требования к качеству переходных процессов объекта по фазовым координатам в интервале времени управления $[t_1, t_2]$;

p, q – положительные числа, удовлетворяющие условиям: $1/p + 1/q = 1$;

X^p, X^q – четные функции X; $k_j (j = \overline{1, m})$ – заданные числа;

$u_j (j = \overline{1, m})$ – управления.

Из вида уравнений (2) теоремы 1 следует, что метод АКОР можно использовать для объектов, описываемых с помощью систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые управления u_j входят линейно. Для расширения области применения метода АКОР предлагается новая модификация метода АКОР для случая p = q = 2 и нелинейно входящих управлениях, которая основывается на следующей теореме.

Теорема 2. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = 2\sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t) u_{1j} u_{2j}, \tag{7}$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_з[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1, \ldots, X_n, t) dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}} \right)^2 dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}\right)^2 dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2 dt+ \tag{8}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2 dt,$$

являются управления

$$u_{1j\text{опт}}=-k_{1j}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right),\quad j=\overline{1,\,m}; \tag{9}$$

$$u_{2j\text{опт}}=-k_{1j}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right),\quad j=\overline{1,\,m}, \tag{10}$$

где V – решение уравнении (5) при граничном условии (6).

Доказательство. Полная производная функции V в силу уравнений объекта (7) и уравнения в частных производных (5) равна

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\frac{dX_i}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(2\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}-f_i\right)=\\&=-Q+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Интегрируя выражение (11) в интервале времени $[t_1,\,t_2]$, получим

$$\begin{aligned}V[X_1(t_2),\,\ldots,\,X_n(t_2),\,t_2]-V[X_1(t_1),\,\ldots,\,X_n(t_1),\,t_1]&=-\int_{t_1}^{t_2}Q dt+\\+2\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}\right)dt.\end{aligned} \tag{12}$$

Функционал (8) с учетом соотношения (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}I&=V[X_1(t_1),\,\ldots,\,X_n(t_1),\,t_1]+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(2\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1,\,\ldots,\,X_n,\,t)u_{1j}u_{2j}\right)dt+\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}\right)^2 dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}\right)^2 dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2 dt+\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2 dt.\end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}u_{1j}u_{2j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}+k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2$$

и

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}u_{1j}u_{2j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}+k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2,$$

то функционал (13) можно записать в виде

$$I=V[X_1(t_1),\ \dots,\ X_n(t_1),\ t_1]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1j}}{k_{1j}}+k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}\right)^2dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{2j}}{k_{2j}}+k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}\right)^2dt\ .$$

Так как подинтегральные выражения неотрицательны, то их минимальные значения могут быть равны нулю, что и выполняется, если управления $u_{1j}(j=\overline{1,\ m})$ определяются соотношением (9), а управления $u_{2j}(j=\overline{1,\ m})$ – соотношением (10).

Заметим, что функционал (8) с учетом соотношений (9) и (10) может быть записан в более компактной и понятной форме:

$$I=V_з[X_1(t_2),\ \dots,\ X_n(t_2),\ t_2]+\int_{t_1}^{t_2}Q(X_1,\ \dots,\ X_n,\ t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{u_{1j}^2+u_{1jопт}^2}{k_{1j}^2}dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{u_{2j}^2+u_{2jопт}^2}{k_{2j}^2}dt$$

или

$$I=V_з[X_1(t_2),\ \dots,\ X_n(t_2),\ t_2]+\int_{t_1}^{t_2}Qdt+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1j}^2}{k_{1j}^2}+\frac{u_{2j}^2}{k_{2j}^2}\right)dt\ .$$

Обобщим теорему 2 на случай, когда используются не сами управления, а некоторые функции от них.

Теорема 3. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t)\psi_{ij}(u_{1ij})\psi_{ij}(u_{2ij}), \qquad (14)$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_з[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right)dt, \qquad (15)$$

являются управления

$$u_{1ij} = -k_{1ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{1ij}; \qquad (16)$$

$$u_{2ij} = -k_{2ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{2ij}, \qquad (17)$$

где V – решение уравнения (5) при граничном условии (6).

Доказательство. Полная производная функции V в силу уравнений объекта (14) и уравнения (5) равна

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\frac{dX_i}{dt} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij} - f_i\right) = \\ &= -Q + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}.\end{aligned} \qquad (18)$$

Интегрируя выражение (18) в интервале времени $[t_1, t_2]$, получим

$$\begin{aligned}V\big[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2\big] - V\big[X_1(t_1), \ldots, X_n(t_1), t_1\big] = -\int_{t_1}^{t_2} Q dt + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij} dt.\end{aligned} \qquad (19)$$

Функционал (15) с учетом соотношения (19) преобразуется к виду

$$I = V[X_1(t_1), \ldots, X_n(t_1), t_1] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}dt + \\ + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right)dt. \tag{20}$$

Поскольку имеем

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{1ij}\right]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij} + \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2}\right] = 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}$$

и

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{2ij}\right]^2 = 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij},$$

то функционал (20) можно записать в виде

$$I = V[X_1(t_1), \ldots, X_n(t_1), t_1] + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{1ij}\right]^2 dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}/2u_{2ij}\right]^2 dt. \tag{21}$$

Если управления u_{1ij}, u_{2ij} определяются соответственно соотношениям (16) и (17), то подинтегральные выражения в функционале (20) обращаются в нуль и он принимает минимальное значение. Следовательно, теорема доказана.

Нетрудно видеть, что выражения (1) являются частными случаями правой части системы уравнений (14). Это наглядно показывает, что теорема 3 является обобщением ранее полученных результатов.

Выводы. Таким образом, доказательство теорем 2 и 3 расширило область возможного применения метода АКОР на объекты, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида (7) и (14), т.е. на объекты, в которых управляющие воздействия входят в виде произведений или в виде суммы произведений функций, определяемых управлениями. В дальнейшем предполагается обобщение полученных результатов и разработка численных методов для синтеза конкретных систем управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с.*
2. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. – М.: Наука, 1977. – 272 с.*
3. *Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.*
4. *Эволюционные методы компьютерного моделирования / А.Ф. Верлань, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Корсунов, В.А. Шорох. – К.: Наук. думка, 1992. – 256 с.*
5. *Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / В.И. Носков, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Заполовский, С.Ю. Леонов. – Х.: ХФИ Транспорт Украины, 2003. – 248 с.*
6. *Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Носков В.И., Баленко А.И. Равновесные математические модели динамических процессов электропривода переменного тока // Научные ведомости БелГУ. Серия "Информатика, прикладная математика, управление". – Т. 1. – Вып. 1(19). – Белгород: БелГУ, 2004. – С. 52 – 64.*
7. *Даниленко А.Ф., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И. Математические модели оптимальных систем управления тяговым асинхронным приводом тепловозов // Электронное моделирование. – 1991. – Т. 13. – №2. – С. 40 – 44.*
8. *Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Марченко В.С. Аналитическое конструирование регуляторов для тяговых асинхронных двигателей // Тез. докл. Всесоюзн. н.-т. конф. "Проблемы подвижного состава с асинхронными тяговыми двигателями". – М.: КМС ВСНТО, 1986. – С. 120 – 122.*

Поступила 5.11.2004

ДМИТРИЕНКО Валерий Дмитриевич, *доктор технических наук, профессор Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". В 1971 году окончил Харьковский политехнический институт. Область научных интересов – моделирование сложных объектов и искусственный интеллект.*

НОСКОВ Валентин Иванович, *кандидат технических наук, главный конструктор ГП "ЭЛЕКТРОТЯЖМАШ". В 1965 году окончил Харьковский авиационный институт. Область научных интересов – тяговый электропривод подвижного состава железных дорог, математическое моделирование.*

МЕЗЕНЦЕВ Николай Викторович*, аспирант Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". В 2003 году окончил Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт". Область научных интересов – математическое моделирование, системы управления электроприводами.*