

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

к.т.н. И.П. Захаров, М.П. Сергиенко
(представил д.т.н., проф. И.В. Руженцев)

Рассмотрен метод идентификации передаточных функций, основанный на дискретном преобразовании экспериментальной переходной характеристики с последующей обработкой методом наименьших квадратов. Приведена методика оценки характеристик систематической и случайной погрешности определения коэффициентов передаточной функции.

Введение. Методам идентификации динамических характеристик линейных систем автоматического управления посвящено большое количество работ [1 – 5]. Основными их недостатками является зависимость алгоритма реализации от модели передаточной функции, а также низкая помехозащищенность. Ниже рассмотрен метод определения коэффициентов передаточных функций в значительной степени свободный от указанных недостатков. Он основан на дискретном преобразовании Лапласа экспериментальной переходной характеристики (ПХ) $h(j\Delta t)$:

$$H(s) = s\Delta t \sum_{j=1}^J \exp(-js\Delta t) h(j\Delta t) \quad (1)$$

с последующей обработкой результатов методом наименьших квадратов. В выражении (1) $H(s)$ – передаточная функция системы; s – оператор Лапласа; Δt – период дискретизации переходной характеристики.

В большинстве случаев передаточная функция может быть описана выражением

$$H(s) = \left(1 + \sum_{i=1}^M s^i a_{i+N} \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^N s^i a_i \right), \quad N > M, \quad (2)$$

где a_i – искомые коэффициенты. Выражение (2) может быть приведено к системе линейных уравнений с $(N + M)$ неизвестными

$$\sum_{i=1}^N s_k^{i-1} a_i - \frac{1}{H(s_k)} \sum_{i=1}^M s_k^{i-1} a_{i+N} = \frac{1 - H(s_k)}{s_k H(s_k)}, \quad (3)$$

где значения оператора Лапласа определяется в дискретных точках как

$sk = k\Delta s$ (Δs – период дискретизации оператора Лапласа).

Для повышения точности обработки результатов измерительного эксперимента на практике используют $k \gg (N+M)$ число уравнений, что делает систему (3) несовместной. Поэтому целесообразно применить к этой системе метод наименьших квадратов [6].

В этом случае сумма квадратов невязок будет минимальной, т.е.

$$Q = \sum_{k=1}^K \delta^2 = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N s_k^{i-1} a_i - \frac{1}{H(s_k)} \sum_{i=1}^M s_k^{i-1} a_{i+N} - \frac{1-H(s_k)}{s_k H(s_k)} \right)^2 = \min,$$

в случае, когда частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N s_k^{i-1} a_i - \frac{1}{H(s_k)} \sum_{i=1}^M s_k^{i-1} a_{i+N} - \frac{1-H(s_k)}{s_k H(s_k)} \right) s_k^{i-1} = 0, \quad i = 1 \dots N;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_{i+N}} = -2 \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N s_k^{i-1} a_i - \frac{1}{H(s_k)} \sum_{i=1}^M s_k^{i-1} a_{i+N} - \frac{1-H(s_k)}{s_k H(s_k)} \right) \frac{s_k^{i-1}}{H(s_k)} = 0, \quad i = 1 \dots M.$$

В результате преобразования полученной системы имеем нормальную систему уравнений с $(N+M)$ неизвестными

$$d \cdot a = y, \tag{4}$$

$$\text{где } d = \begin{pmatrix} J & [s] & \dots & [s^{N-1}] & -\left[\frac{1}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s}{H(s)}\right] & \dots & -\left[\frac{s^{M-1}}{H(s)}\right] \\ [s] & [s^2] & \dots & [s^N] & -\left[\frac{s}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^2}{H(s)}\right] & \dots & -\left[\frac{s^M}{H(s)}\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [s^{N-1}] & [s^N] & \dots & [s^{2(N-1)}] & -\left[\frac{s^{N-1}}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^N}{H(s)}\right] & \dots & -\left[\frac{s^{N+M-2}}{H(s)}\right] \\ -\left[\frac{1}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s}{H(s)}\right] & \dots & -\left[\frac{s^{N-1}}{H(s)}\right] & \left[\frac{1}{H^2(s)}\right] & \left[\frac{s}{H^2(s)}\right] & \dots & \left[\frac{s^{M-1}}{H^2(s)}\right] \\ -\left[\frac{s}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^2}{H(s)}\right] & \dots & -\left[\frac{s^N}{H(s)}\right] & \left[\frac{s}{H^2(s)}\right] & \left[\frac{s^2}{H^2(s)}\right] & \dots & \left[\frac{s^M}{H^2(s)}\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\left[\frac{s^{M-1}}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^M}{H(s)}\right] & \dots & -\left[\frac{s^{N+M-2}}{H(s)}\right] & \left[\frac{s^{M-1}}{H^2(s)}\right] & \left[\frac{s^M}{H^2(s)}\right] & \dots & \left[\frac{s^{2(M-1)}}{H^2(s)}\right] \end{pmatrix};$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \\ a_{N+1} \\ a_{N+2} \\ \dots \\ a_{N+M} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{pmatrix} [(1-H(s))/(sH(s))] \\ [(1-H(s))/(H(s))] \\ \dots \\ [s^{N-2}(1-H(s))/H(s)] \\ - [(1-H(s))/(sH^2(s))] \\ - [(1-H(s))/(H^2(s))] \\ \dots \\ - [s^{M-2}(1-H(s))/H^2(s)] \end{pmatrix} \quad - \text{ матрица коэффициентов,}$$

коэффициенты передаточной функции системы (4) и столбец ее свободных членов соответственно.

Квадратными скобками обозначены гауссовские суммы:

$$\begin{aligned} [s^q] &= \sum_{k=1}^K s_k^q; \quad \left[\frac{s^q}{H(s)} \right] = \sum_{k=1}^K \frac{s_k^q}{H(s_k)}; \quad \left[\frac{s^q}{H^2(s)} \right] = \sum_{k=1}^K \frac{s_k^q}{H^2(s_k)}; \\ \left[s^q \frac{1-H(s)}{H(s)} \right] &= \sum_{k=1}^K s_k^q \frac{1-H(s_k)}{H(s_k)}; \quad \left[s^q \frac{1-H(s)}{H^2(s)} \right] = \sum_{k=1}^K s_k^q \frac{1-H(s_k)}{H^2(s_k)}. \end{aligned}$$

Система (4) может быть решена различными методами, например, методом Крамера

$$a_i = D_i / D,$$

где D – главный определитель системы (4); D_i – определяется путем замены в главном определителе i -го столбца на столбец свободных членов.

Оценим погрешности предлагаемого метода. Общая погрешность метода содержит систематическую и случайную составляющие.

Систематическая погрешность определения коэффициентов передаточной функции зависит от следующих параметров:

- 1) количества j дискретных значений экспериментальной ПХ;
- 2) количества K уравнений в системе (4);
- 3) значения периода дискретизации Δs .

Относительная погрешность нахождения коэффициентов передаточной функции определяется выражением

$$\delta a_i = \frac{a_{i\text{изм}} - a_i}{a_i} 100\%,$$

где $a_{i\text{изм}}$ – измеренное значение искомого коэффициента a_i .

Случайная составляющая погрешности определяется среднеквадратическим отклонением (СКО) коэффициентов передаточной функции

$$\sigma_{a_i} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial a_i}{\partial H(s_k)} \right)^2} \sigma_{H(s_k)}^2, \quad (5)$$

где $\sigma_{H(s_k)}$ – СКО значений передаточной функции, определяемой как

$$\sigma_{H(s_k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial H(s_k)}{\partial h(j\Delta t)} \right)^2} \sigma_{h(j\Delta t)}^2,$$

где $\sigma_{h(j\Delta t)}$ – СКО значений ПХ СИТ, которое определяется наличием аддитивных шумов в выходном сигнале системы и является одинаковым во всех J точках переходной характеристики.

Дифференцируя выражение (1) по $h(j\Delta t)$, получаем СКО значений передаточной функции в виде

$$\sigma_{H(s_k)} = s_k \Delta t \sqrt{\sum_{j=1}^J \exp(-2js_k \Delta t) \sigma_{h(j\Delta t)}^2}.$$

Рассмотрим реализацию данного метода на примере системы, описываемой аperiодическим звеном с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}.$$

Коэффициенты передаточной функции соответственно равны:

$$a_1 = \tau_1 + \tau_2; \quad a_2 = \tau_1 \tau_2.$$

Переходная характеристика такой системы имеет вид

$$h(t) = 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right),$$

а система уравнений (4) – $\begin{pmatrix} J \\ [s] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [s] \\ [s^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(1 - H(s))/(sH(s))] \\ [(1 - H(s))/H(s)] \end{pmatrix}$.

Коэффициенты a_1 и a_2 рассчитываются методом Крамера, а постоянные времени можно найти как

$$\tau_{1,2} = \left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right) / 2.$$

Относительная погрешность нахождения постоянных времени определяется из выражения

$$\delta\tau_{1,2} = \frac{\tau_{1,2\text{изм}} - \tau_{1,2}}{\tau_{1,2}} 100\%.$$

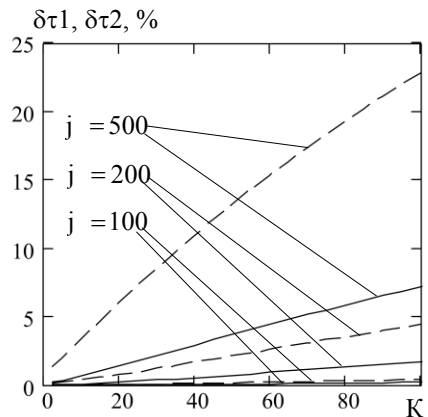
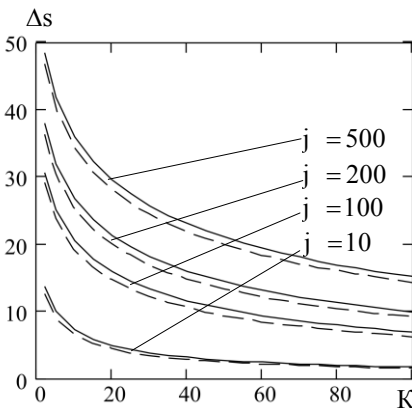
Для исследования систематической составляющей погрешности зада-

димся значениями постоянных времени: $\tau_1 = 0,012646$ с; $\tau_2 = 0,001134$ с.

На рис. 1, а показаны зависимости оптимальных значений периода дискретизации оператора Лапласа (при которых абсолютная погрешность определения постоянной времени равна нулю) при разном количестве дискретных точек ПХ и уравнений в системе (6). Оптимальные значения индивидуальны для каждой постоянной времени, и погрешности, возникающие при определении одной постоянной времени, когда погрешность другой равна нулю, показаны на рис.1, б. Сплошной линией показаны зависимости для τ_1 , штрихпунктирной – для τ_2 .

СКО коэффициентов передаточной функции рассчитываем по формуле (5). После выполнения необходимых преобразований, получаем:

$$\sigma_{a_1} = \frac{\Delta t \sigma_{h(j\Delta t)}}{D} \left(\left[\frac{\sum_{j=1}^J \exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)} \right] [s^2]^2 - 2 \left[\frac{s \sum_{j=1}^J \exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)} \right] [s^2] [s] + \right. \\ \left. + \left[\frac{s^2 \sum_{j=1}^J \exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)} \right] [s]^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; \sigma_{a_2} = \frac{\Delta t \sigma_{h(j\Delta t)}}{D} \left(J^2 \left[\frac{s^2 \sum_{j=1}^J \exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)} \right] - \right. \\ \left. - 2J \left[\frac{s \sum_{j=1}^J \exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)} \right] [s] + \left[\frac{\sum_{j=1}^J \exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)} \right] [s]^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$



а

б

Рис. 1. Зависимости оптимальных значений Δs для разного числа дискретных точек ПХ и уравнений (а); зависимости погрешностей определения τ_2 и τ_1 , когда погрешности определения τ_1 и τ_2 равны нулю (б)

Зависимость СКО коэффициентов передаточной функции от СКО аддитивного шума в выходном сигнале системы линейна. Рассмотрим ее на примере системы с приведенными выше параметрами. Как было выявлено при исследовании систематической погрешности, в этом случае при количестве выборок ПХ $J=100$ и количестве уравнений $K=20$ оптимальное значение оператора Лапласа $\Delta s=14,615$ (оно является оптимальным для τ_2 , но поскольку погрешности определения τ_1 меньше (рис. 1, б), то выбираем его). Зависимости СКО коэффициентов передаточной функции от СКО аддитивного шума при указанных условиях имеют следующий вид:

$$\sigma_{a_1} = 2,174 \cdot 10^{-2} \sigma_{h(j\Delta t)}; \quad \sigma_{a_2} = 2,146 \cdot 10^{-4} \sigma_{h(j\Delta t)}.$$

Выводы. Таким образом, предлагаемый метод определения коэффициентов передаточной функции позволяет устранить систематическую погрешность путем выбора оптимальных соотношений между количествами дискретных точек ПХ системы и уравнений при реализации метода наименьших квадратов, а также обладает удовлетворительной помехозащищенностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дехтяренко П.И., Коваленко В.П. *Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования*. – М.: Энергия, 1973. – 115 с.
2. Костенко Ю.Т. и др. *Системы управления с динамическими моделями*. – Х.: Основа, 1996. – 212 с.
3. Габисония В.Е. *Теория и устройства систем автоматического управления*. – Тбилиси: Мецниереба, 1988. – 228 с.
4. Марасанов В.В. *Элементы теории систем / Под ред. Ю.А. Масленникова*. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 173 с.
5. Эйкхофф П.И. др. *Современные методы идентификации систем*. – М.: Мир, 1985. – 400 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров*

ров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1981. – 700 с.

Поступила 8.11.2004

ЗАХАРОВ Игорь Петрович, канд. техн. наук, доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники. В 1978 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – измерительная идентификация.

СЕРГИЕНКО Марина Петровна, аспирант кафедры метрологии измерительной техники Харьковского национального университета радиоэлектроники. В 2002 году окончила ХНУРЭ. Область научных интересов – определение динамических характеристик линейных средств измерений.
