

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ ТЕНЗОРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ ОДНОМЕРНОЙ КОНТУРНОЙ СЕТЬЮ

к.т.н. А.В. Лемешко, к.т.н. А.И. Тимочко, А.А. Кравчук  
(представил д.т.н., проф. В.В. Поповский)

*Предлагается математическая модель телекоммуникационной системы (ТКС), представленная одномерной контурной сетью с использованием возможностей аппарата тензорного анализа сетей. Модель описывает процесс гарантированного обслуживания одиночных пакетов в ТКС с требуемым показателем надежности их доставки.*

**Введение.** Основная сложность при решении проблемы обеспечения требуемого качества обслуживания (QoS) заключается в необходимости учета и контроля в рамках используемых моделей телекоммуникационных систем (ТКС) одновременно нескольких вероятностно-временных показателей. К числу временных относятся задержка передачи пакетов, джиттер, а к множеству показателей надежности связи – вероятность правильной и (или) своевременной доставки пакета [1].

Большинство подходов к решению проблемы обеспечения QoS в основном базируются на использовании графокомбинаторных моделей ТКС [2, 3] или сетевых моделей теории массового обслуживания [4, 5]. Ограниченность таких моделей состоит в сложности одновременного контроля QoS и обеспечения сбалансированной загрузки сетевых ресурсов, подразумевающей многопутевой способ доставки пакетов. В этой связи заслуживает внимания подход, основанный на использовании возможностей тензорного анализа сетей [6], который нашел свое применение при разработке математических моделей ТКС, ориентированных на обеспечение QoS по временным показателям [7]. **Цель данной статьи** состоит в обеспечении учета вероятностных показателей в процессе многопутевой доставки одиночных пакетов с их адаптивной фрагментацией (дефрагментацией). Цель будет достигнута путем решения *задачи*, связанной с разработкой вероятностной тензорной модели ТКС.

**Топологическое описание ТКС одномерной контурной сетью.** В рамках тензорного анализа сетей при моделировании структуры ТКС

вводится понятие одномерной сети  $S = (U, V)$ , состоящей из двух множеств: конечного множества  $U = \{u_i, i = \overline{1, m}\}$  нульмерных симплексов – узлов сети, и конечного множества  $V = \{v_j, j = \overline{1, n}\}$  одномерных симплексов – ветвей сети. Узлы сети моделируют маршрутизаторы ТКС, а ветви – тракты передачи (ТП). Путь в сети представляет собой конечную последовательность ветвей. Путь  $\pi$  называется контуром, если его конечные узлы одинаковы. Например, путь, проходящий последовательно по ветвям  $v_2, v_4$  и  $v_5$  (рис. 1) является контуром ( $\pi_3$ ).

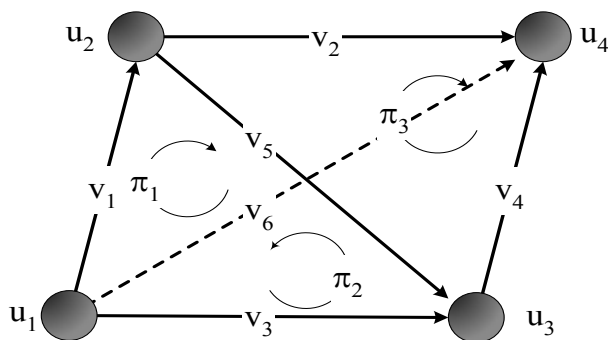


Рис. 1. Структурная модель ТКС, представленная одномерной  $\pi$ -сетью

Направление пути может задаваться произвольно и не связано с физикой моделируемой системы. Как видно на рис. 1, контур  $\pi_1$  имеет ориентацию противоположную контуру  $\pi_2$ . Далее сеть, представленная как совокупность контуров, будет именоваться как  $\pi$ -сеть.

Особенностью  $\pi$ -сетей [2], является наличие в их функциональном описании векторов возбуждения, что накладывает дополнительный отпечаток и на структурное описание сети. Это проявляется, прежде всего, в необходимости введения в структуру сети мнимых ветвей. Мнимые ветви вводятся в том случае, когда в анализируемом направлении связи, то есть между истоком и стоком, отсутствует физическая ветвь, моделирующая физически существующий тракт передачи в ТКС. Например, при рассмотрении сети, приведенной на рис. 1, как  $\pi$ -сети в ходе анализа процессов информационного обмена между узлами  $u_1$  и  $u_4$  возникает необходимость введения мнимой ветви между этими узлами, ориентация которой соответствует направлению передачи информации. Тогда кон-

турная сеть (рис. 1) будет состоять из шести ветвей ( $n = 6$ ), из которых пять физических и одна мнимая, а также четырех узлов ( $m = 4$ ).

Полюсами называются те узлы сети, через которые в сеть поступает или через которые убывает из сети определенный информационный трафик. Все остальные узлы называют внутренними. Далее основное внимание будет уделено именно двухполюсным сетям, т.е. сетям в которых во множестве узлов выделяется два полюса: один исток и один сток, между которыми осуществляется доставка сообщения.

Пусть связная сеть  $S$  состоит из  $n$  ветвей и  $m$  узлов. Тогда цикломатическое число  $\mu(S)$  определяет в ней число базисных контуров

$$\mu(S) = n - m + 1. \quad (1)$$

Для обеспечения многоаспектного (многостороннего) описания ТКС в рассматриваемом  $n$ -мерном дискретном пространстве-структуре могут быть приняты во внимание целый ряд подпространств и систем координат. Основное требование, которое должно удовлетворяться в процессе выбора, это информативность этих систем координат, опираясь на которые, можно рассчитать необходимые компоненты в той или иной СК.

**Функциональное описание ТКС тензорной моделью.** За основу функционального описания ТКС в рамках предлагаемой тензорной модели, будет взято следующее скалярное уравнение, характеризующее основные вероятностные параметры сети:

$$p_i^n = (1 - p_{BER}^i)^{h_v^i} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где  $p_i^n$  – вероятность правильной передачи пакета длиной  $h_v^i$  (бит) в ветви  $v_i$ ;  $p_{BER}^i$  – вероятность ошибки на бит (BER – Bit Error Rate).

Для приведения уравнения (2) к тензорному виду необходимо провести ряд преобразований и учесть, что вероятность  $p_n$  правильной передачи пакета по пути, состоящего из  $\alpha$  ветвей, рассчитывается как

$$p_n = \prod_{i=1}^{\alpha} p_i^n. \quad (3)$$

Выражение (3) можно путем логарифмирования привести к аддитивной форме для дальнейшего определения ко- и контравариантных величин в выводимом тензорном уравнении. Тогда

$$\log_2 p_n = \sum_{i=1}^{\alpha} \log_2 p_i^n. \quad (4)$$

Выражение (4) с учетом (2) примет вид

$$\log_2 p_i^n = \left[ \log_2 (1 - p_{BER}^i) \right] h_v^i,$$

которое, в свою очередь, можно записать в матричной форме

$$P_v = Y_v H_v, \quad (5)$$

где  $P_v = [p_1^v \ p_2^v \ \dots \ p_i^v \ \dots \ p_n^v]^t$  и  $H_v = [h_v^1 \ h_v^2 \ \dots \ h_v^i \ \dots \ h_v^n]^t$  при  $p_i^v = \log_2 p_i^H$  ( $i = \overline{1, n}$ );  $Y_v = \parallel y_{ij}^v \parallel$  – диагональная матрица размерности  $n \times n$ , элементы главной диагонали которой определяются как  $y_{ii}^v = \log_2(1 - p_{BER}^i)$ ,  $[ \cdot ]^t$  – операция транспонирования.

На сети (рис. 1) можно ввести 6-мерное пространство ветвей и 3-мерное подпространство контуров, так как согласно выражению (1) цикломатическое число сети равно трем ( $\mu = 3$ ). Для определения систем координат введенных пространств и подпространств определим остов  $E$  сети на ветвях  $v_2$ ,  $v_4$  и  $v_6$ . На его хордах  $v_1$ ,  $v_3$  и  $v_5$  построим три базисных контура:

$$\pi_1 = v_1 + v_2 - v_6; \quad \pi_2 = v_3 + v_4 - v_6; \quad \pi_3 = v_2 - v_4 - v_5, \quad (6)$$

в которые ни одна хорда не входила бы дважды.

Подобный выбор базисных путей (6) определил следующий вид базисной матрицы контуров:

$$B_\pi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Следующим этапом после определения матричного уравнения поведения системы (5) является приведение этого уравнения к тензорному виду с определением инвариантных, ковариантных и контравариантных величин, связанное с принятием постулата второго обобщения [6]. В соответствие со вторым и третьим постулатом обобщения векторно-матричное уравнение (5) определяют общий вид одновременно инвариантного и тензорного уравнения

Выражение (5) уже в тензорной форме примет следующий вид

$$P = Y N, \quad (8)$$

в котором  $P$  – одновалентный ковариантный тензор и, в соответствии с обратным тензорным признаком,  $Y$  – дважды ковариантный тензор.

Введем в рассмотрение две координатные системы. Первая – система координат ветвей сети, а вторая – система координат контуров сети. При этом в первой системе координат в качестве координатных путей непосредственно выступают отдельные ветви сети, а во второй – координатные пути представлены базисными контурами. Сеть, соответствующая системе координат отдельных ветвей, будет выступать в качестве

примитивной [6, 7]. И если в первой СК тензорное уравнение поведения сети (8) принимает вид выражения (5), то во второй СК уравнение (8) примет следующий вид:

$$P_\pi = Y_\pi H_\pi, \quad (9)$$

где  $P_\pi$ ,  $H_\pi$ ,  $Y_\pi$  проекции тензоров  $P$ ,  $H$ ,  $Y$  в базисе контуров, причем

$$P_\pi = [p_1^\pi \quad p_2^\pi \quad \dots \quad p_i^\pi \quad \dots \quad p_\mu^\pi]^t \text{ и } Y_\pi = \|y_{ij}^\pi\| \quad (i, j = \overline{1, \mu}).$$

Вектор  $P_v^+$  – вектор возбуждения размерности  $n$ , одна из координат которого задает требуемую вероятность правильной передачи пакета между заданной парой узлов, представленную в логарифмической форме, т.е.  $p^+ = \log_2 p_{\text{трб}}^n$ . Для сети (рис.1) этот вектор имеет вид

$$P_v^+ = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \log_2 p_{\text{трб}}^n]^t.$$

Контурную модель ТКС можно представить категорией  $K_\pi(C_\pi, D_\pi)$ , множество объектов  $C_\pi$  которой составляют вектор  $P_v^+$ , а также проекции тензоров  $H$  и  $P$  в базисе ветвей и контуров сети. Множество морфизмов  $D_\pi$  категории  $K_\pi$  составляют базисные матрицы контуров сети, а также проекции  $Y_v$ ,  $Y_\pi$ ,  $X_\pi$  тензоров  $Y$  и  $X$  соответственно в базисе ветвей и контуров сети, причем

$$X_\pi = [Y_\pi]^{-1}.$$

В рамках категориально-тензорного представления для рассмотренной контурной модели имеет место следующая алгебраическая диаграмма (рис. 2).

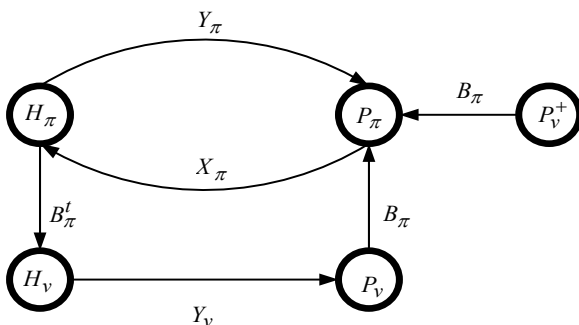


Рис. 2. Алгебраическая диаграмма категории тензорных моделей ТКС, представленных  $\pi$ -сетью

**Контурный метод расчета сети.** Тензорный метод расчета ТКС, представленной  $\pi$ -сетью, предполагает следующую постановку задачи:

*Дано:* исходная структура ТКС; вероятности ошибки на бит в ветвях сети, представленные в виде матрицы  $Y_v$ ; направление передачи; требования к величине вероятности правильной передачи пакета заданной длины ( $p_{\text{треб}}^n$ ), представленной в виде координат вектора  $P_v^+$ .

*Необходимо рассчитать* максимальную величину пакета, который может быть передан в соответствие с указанными требованиями, а также порядок его фрагментации в узлах, что подразумевает нахождение вектора  $H_v$ .

*Порядок расчета:*

1. Путем анализа структуры исходной сети определяется необходимость введения мнимой ветви в анализируемом направлении передачи пакетов. По полученному количеству ветвей ( $n$ ) и узлов ( $m$ ) в сети рассчитывается цикломатическое число  $\mu$  (1). Выбирается остов сети  $E$  (6), относительно которого определяется множество базисных контуров с формированием базисной матрицы контуров  $B_\pi$  (7).

2. В соответствие с диаграммой (рис. 2) производится расчет проекции ковариантного тензора в системе координат базисных контуров

$$P_\pi = B_\pi P_v^+ . \quad (10)$$

3. Рассчитывается проекция дважды ковариантного тензора в СК базисных контуров

$$Y_\pi = B_\pi Y_v B_\pi^t . \quad (11)$$

4. Рассчитываются проекции тензора  $H$  в СК контуров сети

$$H_\pi = [Y_\pi]^{-1} P_\pi . \quad (12)$$

5. Производится расчет проекций тензора  $H$  в СК ветвей сети

$$H_v = B_\pi^t H_\pi \quad (13)$$

при этом координата вектора  $H_v$ , соответствующая направлению передачи исток-сток сети, определит искомую величину пакета, который можно передать с заданной вероятностью правильной передачи. Остальные координаты вектора  $H_v$  определяют порядок фрагментации пакета в узлах сети. Вероятности правильной передачи фрагментов пакета в ветвях сети, представленные в виде координат вектора  $P_v$ , рассчитываются согласно выражению (6) соответственно.

**Пример расчета сети.** На основании предложенного контурного метода, проведен расчет сети, изображенной на рис. 1, со следующими исходными данными:

1. Сеть состоит из четырех узлов ( $m = 4$ ), причем направление передачи от первого узла сети к четвертому, и шести ветвей ( $n = 6$ ), среди которых шестая ветвь является мнимой, необходимость введения которой описана в предыдущем разделе.

2. Вероятности ошибки на бит в ветвях сети представлены в табл. 1.

Таблица 1

Вероятности ошибки на бит в ветвях сети

Номер ветви	1	2	3	4	5	6
$P_{\text{ВЕР}}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	0

Содержание табл. 1, в свою очередь, определяет следующий вид матрицы:

$$Y_v = \begin{bmatrix} -0,0115 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0115 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1154 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0115 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.$$

3. Требуемая вероятность правильной передачи пакета  $P_{\text{трб}}^n = 1 - 10^{-3}$ , что определило следующий вид вектора:

$$P_v^+ = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\log_2(1 - 10^{-3}) \right]^t.$$

На основании выражений (10) – (13) получаем:

$$P_\pi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0014 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0014 \\ 0,0014 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Y_\pi = \begin{bmatrix} -0,0231 & 0 & -0,0115 \\ 0 & -0,1270 & 0,0115 \\ -0,0115 & 0,0115 & -0,0346 \end{bmatrix} \times 10^{-5};$$

$$H_{\pi} = \begin{bmatrix} -5,2313 & 0,1635 & 1,7983 \\ 0,1635 & -0,8174 & -0,3270 \\ 1,7983 & -0,3270 & -3,5965 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0014 \\ 0,0014 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^6 = \begin{bmatrix} 7,3150 \\ 0,9439 \\ -2,1237 \end{bmatrix} \times 10^3;$$

$$H_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,3150 \\ 0,9439 \\ -2,1237 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 7,3150 \\ 5,1913 \\ 0,9439 \\ 3,0676 \\ 2,1237 \\ -8,2588 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

при этом координата вектора  $H_v$ , соответствующая анализируемому направлению передачи исток-сток, определит искомую величину пакета ( $8,26 \times 10^3$ ), который можно передать в сети с заданной вероятностью правильной доставки. Остальные координаты вектора  $H_v$  определяют порядок фрагментации (дефрагментации) пакета в узлах сети.

Из выражения (5) получаем проекцию тензора  $P$  в системе координат ветвей

$$P_v = \begin{bmatrix} 0,000841 \\ 0,000597 \\ 0,001089 \\ 0,000353 \\ 0,000244 \\ 0 \end{bmatrix},$$

по которой решение поставленной задачи можно представить в виде следующей табл. 2.

Таблица 2

Величины фрагментов и вероятностей их правильной доставки  
в различных ветвях рассмотренной сети

Номер ветви (i)	1	2	3	4	5
$h_v^i$ (бит)	7315	5191	944	3068	2124
$p_i^{\pi}$	0,9994	0,9996	0,9993	0,9998	0,9998

Решение определило следующих три маршрута (пути) доведения фрагментов передаваемого пакета:

$$u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_4; \quad u_1 \rightarrow u_3 \rightarrow u_4; \quad u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_4.$$

Вдоль каждого пути вероятность правильной доставки фрагмента



одинакова и определяет вероятность правильной доставки пакета, которая по условию задачи составляет 0,999. К достоинствам метода также можно отнести то, что при получении решения задачи, в рассчитываемых маршрутах доставки отсутствуют контуры, что подтверждено приведенным примером. Полученные результаты решения в графическом виде приведены на рис. 3, где в ветвях сети показаны через дробь величина передаваемого фрагмента и вероятность его правильной передачи

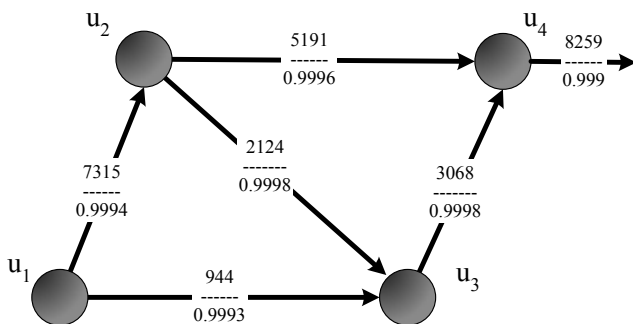


Рис. 3. Результаты решения задачи

**Выводы.** Таким образом, в работе предложены тензорная модель и метод расчета вероятностных характеристик ТКС, представленной контурной сетью ( $\pi$ -сетью). Особенностью  $\pi$ -сетей является то, что процесс возбуждения сети носит однотипный характер, причем в качестве возбуждающих переменных выступали поперечные величины (вероятность правильной передачи пакета).

Требуемая целостность математического описания телекоммуникационной системы достигалась за счет взаимоувязанного рассмотрения тензорной модели ТКС одновременно в нескольких координатных системах: ветвей сети и базисных контуров. Неортогональный характер тензорных моделей ТКС выражался в различной размерности анализируемых координатных систем, что, в конечном итоге, определило прямоугольную структуру матриц координатного преобразования, формализующих взаимосвязь получаемых решений.

Категориальное представление тензорных моделей ТКС, представленной  $\pi$ -сети, позволило определить тензорный метод расчета искомых параметров и характеристик системы. При тензорном описании ТКС удалось формализовать и обеспечить аналитическое решение задачи, связанной с нахождением величин пакетов, которые могут быть пе-

реданы путем их фрагментации (дефрагментации) между заданной парой узлов сети с заданной вероятностью безошибочной доставки. При этом фрагменты пакета доставлялись по множеству независимых бес контурных маршрутов, вдоль которых вероятность правильной доставки фрагмента равнялась заданному значению. Результаты численного примера подтвердили корректность теоретических выкладок.

Предложенная модель может быть использована при передаче пакетов трафика, не чувствительного к временным задержкам, но критичного к потерям передаваемых данных, например, при обеспечении сервиса UBR (Unspecified Bit Rate) в АТМ-сетях. Развитие приведенной тензорной модели ТКС видится в расширении ее возможностей на случай описания потокового характера трафика и одновременного учета других вероятностно-временных показателей QoS.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вегшина Ш. *Качество обслуживания в сетях IP*. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 368 с.
2. Vutukury S., Garcia-Luna-Aceves J.J. *A Simple Approximation to Minimum Delay Routing // Proc. of ACM SIGCOMM*. – 1999. – P. 39 – 50.
3. Korkmaz T., Krunk M. *Multi-Constrained Optimal Path Selection // Proc. Of IEEE INFOCOM 2001*. – Vol. 2. – 2001. – P. 834 – 843.
4. Дымарский Я.С., Нурмиева М.В. *Оптимальное распределение ресурсов в сети с разнородными потоками // Вестник МАИСУ*. – С.-Пб. – 2002. – № 6. – С. 31 – 35.
5. Вишневский В.М. *Теоретические основы проектирования компьютерных систем*. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
6. Крон Г. *Тензорный анализ сетей: Пер. с англ. / Под ред. Л.Т. Кузина, П.Г. Кузнецова*. – М.: Сов. радио, 1978. – 720 с.
7. Поповский В.В., Лемешко А.В. *Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем // Радиотехника. Всеукр. межведомств. науч.-техн. сб.* – 2002. – Вып. 125. – С. 156 – 164.

Поступила 29.10.2004

**ЛЕМЕШКО Александр Витальевич**, канд. техн. наук, доцент кафедры Харьковского университета Воздушных Сил. В 1994 году окончил Харьковский военный университет. Область научных интересов – моделирование и оптимизация сетей связи.

**ТИМОЧКО Александр Иванович**, канд. техн. наук, доцент, начальник факультета Харьковского университета Воздушных Сил. В 2003 году окончил Национальную академию обороны Украины. Область научных интересов – моделирование систем, системы поддержки принятия решений.

***КРАВЧУК Александр Анатольевич**, инженер кафедры Харьковского университета Воздушных Сил. В 2004 году окончил Харьковский институт Военно-Воздушных Сил. Область научных интересов – моделирование и оптимизация сетей связи.*

---