УДК 519.6:514.1

ИНТЕРВАЛЬНАЯ m-ПЛОСКОСТЬ

д.т.н. Т.Е. Романова, к.ф.-м.н. Л.Г. Евсеева, к.т.н. С.Б. Шеховцов

Вводится понятие интервальной m-плоскости, интервальной m-псевдоплоскости, интервальной псевдопрямой и интервальной прямой в многомерном интервальном пространстве $I_s^n R$. *Построены и исследованы интервальные уравнения n-мерной интервальной прямой в параметрической форме.*

Постановка проблемы. Создание современной радиоэлектронной аппаратуры на высоком научно-техническом уровне невозможно без внедрения автоматизированных методов проектирования. В комплексе задач технического проектирования особое место занимают задачи компоновки, в частности, задачи компоновки объектов с кусочно-линейной границей. Для построения адекватных математических моделей необходимо уже на этапе моделирования осуществлять учет погрешностей исходных данных.

Анализ последних исследований и публикаций. Модели и методы решения оптимизационных задач размещения [1] с учетом погрешностей исходных данных на основе использования элементов интервальной геометрии [2, 3] приведены, например, в работах [4 – 6]. Однако эти исследования проводились только для задач размещения плоских геометрических объектов, таких как: прямоугольник, правильный многоугольник. Развитие теории геометрического проектирования требует расширения класса базовых объектов и перехода в многомерные пространства.

Формулировка цели статьи. В многомерном интервальном пространстве строим математическую модель m-плоскости, на основе которой определяем интервальную прямую как одномерную интервальную плоскость. При этом для описания и исследования предложенных интервальных моделей используются методы интервального анализа в геометрическом проектировании [2, 3].

Изложение основного материала исследования. Рассмотрим интервальное пространство $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{I}_s\mathbf{R}}_{n}$ [7], здесь $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – расширенное пространство центрированных интервалов [2, 3], элементы которого $U = (\langle X_1 \rangle, \ldots, \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $\langle X_i \rangle = \left\langle x_i, \nu_{x_i} \right\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_n = \{1, 2, \ldots, n$.

Определим в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ понятие интервальной m-плоскости, понятие интервальной прямой, базируясь на понятии интервальной прямой в пространствах $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ [9] и $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ [10], используя основные положения аналитической геометрии в многомерном евклидовом пространстве R^n [11]. Рассмотрим квазилинейное интервальное отображение $\mathbf{F}:\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [9] вида

$$\mathbf{F}(U)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i\right\rangle*\left\langle X_i\right\rangle, \tag{1}$$

где $\left\langle A_i\right\rangle=\left\langle a_i,\nu_{a_i}\right\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\left\langle X\right\rangle=\left\langle x_i,\nu_{x_i}\right\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\forall i\in J_n$ – интервальные коэффициенты и интервальные переменные соответственно; $*$ – знак интервального умножения [2].

На основании разбиения пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [3]:

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R}=\mathbf{I}_{s_1}\bigcup\mathbf{I}_{s_2}\bigcup\mathbf{I}_{s_3}, \tag{2}$$

где $\mathbf{I}_{s_3}=\mathrm{cl}\,\mathbf{I}_{s_3}=\{\left\langle x,\nu_x\right\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}\big|(x-|\nu_x|\le 0)\wedge(x+|\nu_x|\ge 0)\}$;

$\mathbf{I}_{s_1}=\mathrm{int}\,\mathbf{I}_{s_1}=\{\left\langle x,\nu_x\right\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}\big|x-|\nu_x|>0\}$; $\mathbf{I}_{s_2}=\mathrm{int}\,\mathbf{I}_{s_2}=\{\left\langle x,\nu_x\right\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}\big|x-|\nu_x|<0\}$;

$\mathbf{I}_{s_3}^{+}=\{\left\langle x,\nu_x\right\rangle\in\mathbf{I}_{s_3}\big|\nu_x\ge 0\}$; $\mathbf{I}_{s_3}^{-}=\{\left\langle x,\nu_x\right\rangle\in\mathbf{I}_{s_3}\big|\nu_x<0\}$; $\mathbf{I}_{s_3}=\mathbf{I}_{s_3}^{+}\cup\mathbf{I}_{s_3}^{-}$,

положим, что интервальные коэффициенты отображения (1) удовлетворяют условию $\left\langle A_i\right\rangle\in\mathbf{I}_{s_1}\bigcup\mathbf{I}_{s_2}\bigcup\{0\}$, $\forall i\in J_n$.

Определение 1. Интервальное уравнение вида: $\mathbf{F}(U)+\left\langle C\right\rangle=\left\langle 0\right\rangle$, где $\mathbf{F}$ – квазилинейное интервальное отображение вида (1), $\left\langle C\right\rangle=\left\langle c,\nu_c\right\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [11], называется квазилинейным интервальным уравнением, а множество точек $\hat{\mathbf{\Pi}}\subset\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, удовлетворяющих этому уравнению, – квазилинейной интервальной гиперповерхностью в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$. Иначе

$$\hat{\mathbf{\Pi}}:\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i\right\rangle*\left\langle X_i\right\rangle+\left\langle C\right\rangle=\left\langle 0\right\rangle. \tag{3}$$

В интервальных пространствах $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$, $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ квазилинейная интервальная гиперповерхность есть интервальная ломаная [9, 10].

Отметим некоторые свойства уравнения (3):

1. $\overline{-\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i\right\rangle*\left\langle X_i\right\rangle}-\overline{\left\langle C\right\rangle}=\left\langle 0\right\rangle$; $\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i\right\rangle*\left\langle X_i\right\rangle=-\overline{\left\langle C\right\rangle}$;

$\sum_{i=1}^{k}\left\langle A_{\alpha_i}\right\rangle*\left\langle X_{\alpha_i}\right\rangle=\overline{-\sum_{i=k+1}^{n}\left\langle A_{\alpha_i}\right\rangle*\left\langle X_{\alpha_i}\right\rangle}-\overline{\left\langle C\right\rangle}$, $\alpha_i\in J_n$, $i\in J_n$, $k\in J_{n-1}$.

2. Исходя из непрерывности и кусочной линейности соответствующего уравнения в пространстве $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ [9] и непрерывности операций сложения и умножения в интервальных пространствах, заключаем, что уравнение (3) непрерывно и кусочно-линейно.

3. Если $\langle A_i \rangle = \langle a_i, 0 \rangle$, $\forall i \in J_n$, то уравнение (3) линейно.

4. С учетом того, что $\mathbf{F}(U) + \langle C \rangle = \langle f_1(U), f_2(U) \rangle$, где $f_i(U) : \mathbf{I}_s^n\mathbf{R} \to R^1$, $i = 1, 2$, $U = (\langle x_1, \nu_{x_1} \rangle, \langle x_2, \nu_{x_2} \rangle, \ldots, \langle x_n, \nu_{x_n} \rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, уравнение (3) можно представить в виде: $\langle f_1(U), f_2(U) \rangle = \langle 0 \rangle$.

Для определения конкретного вида уравнения (3) воспользуемся разбиением пространства $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ [7]:

$$\mathbf{I}_s^n\mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^{N} \mathbf{\Omega}_k \;;\; \mathbf{\Omega}_k = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2 \times \ldots \times \mathbf{J}_n, \tag{5}$$

где $\mathbf{J}_i \in \left\{ \mathbf{I}_{s_1}, \mathbf{I}_{s_2}, \mathbf{I}_{s_3}^+, \mathbf{I}_{s_3}^- \right\}$, $i \in J_n$, $N = 4^n$, интервальные множества $\mathbf{I}_{s_i}$, $i = 1, 2, 3$, определяются выражениями (2).

На каждом из интервальных множеств $\mathbf{\Omega}_k \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $\forall k \in J_N$, интервальная функция [2] (1) интервально линейна [9], поэтому интервальная гиперповерхность $\hat{\mathbf{\Pi}} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $U \in \mathbf{\Omega}_k$, является линейной гиперповерхностью. Интервальное множество $\mathbf{\Omega}_k \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $\forall k \in J_N$, назовем областью линейности квазилинейной гиперповерхности $\hat{\mathbf{\Pi}}$.

Используя таблицу определения операции интервального умножения $\langle A \rangle * \langle X \rangle$, $\langle A \rangle, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [2], заключаем, что конкретный вид уравнения (3) зависит от вида множества $\mathbf{\Omega}_k$ и от значений интервальных коэффициентов в соответствии с разбиением (2).

В пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ рассмотрим $n - m$ $(m \le n)$ квазилинейных интервальных квазилинейных гиперповерхностей $\hat{\mathbf{\Pi}}_i$, $i \in J_{n-m}$.

Определение 2. Квазилинейной интервальной поверхностью размерности m, $(m \le n)$, или, интервальной квазилинейной m-поверхностью, пространства $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ назовем пересечение множеств $\hat{\mathbf{\Pi}}_i$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \langle A_{1j} \rangle * \langle X_j \rangle + \langle C_1 \rangle = \langle 0 \rangle; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \langle A_{n-m,j} \rangle * \langle X_j \rangle + \langle C_{n-m} \rangle = \langle 0 \rangle, \end{cases} \tag{6}$$

где $\langle A_{ij}\rangle = \langle a_{ij}, \nu_{a_{ij}}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$; $\langle C_i\rangle = \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$; $i \in J_{n-m}$; $j \in J_n$.

Матрицей данной системы является интервальная матрица [10] вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle A_{11}\rangle & \langle A_{12}\rangle & \dots & \langle A_{1n}\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle A_{n-m,1}\rangle & \langle A_{n-m,2}\rangle & \dots & \langle A_{n-m,n}\rangle \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Рангом интервальной матрицы $\mathbf{A}$ назовем ранг [11] соответствующей матрицы **A** вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \dots & a_{n-m,n} \end{pmatrix}.$$

Определение 4. $n-m$ интервальных квазилинейных гиперповерхностей $\hat{\mathbf{\Pi}}_i$, $i \in J_{n-m}$, в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ назовем интервально линейно независимыми, если ранг интервальной матрицы системы (6) равен $n-m$.

Рассмотрим всевозможные варианты значений интервальных коэффициентов и интервальных переменных уравнений системы (6). Положим, $\langle A_{ij}\rangle \in \mathbf{I}_{s_1}$, $i \in J_{n-m}$, $j \in J_n$. Тогда на основе разбиения (2) систему (6) можно представить как совокупность N систем линейных интервальных уравнений. Обозначим множество решений системы (6) на множестве $\mathbf{\Omega}_k \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $k \in J_N$, через $\hat{\mathbf{L}}_k$.

Определение 5. Интервальное множество $\hat{\mathbf{L}} = \bigcup_{k=1}^{N} \hat{\mathbf{L}}_k \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ назовем интервально кусочно-линейной m-поверхностью $\hat{\mathbf{L}} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, а его подмножества $\hat{\mathbf{L}}_k \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $j \in J_n$ – интервально линейными участками интервальной m-поверхности.

Интервальная кусочно-линейная m-поверхность имеет не менее одного и не более N интервально линейных участков.

При $n = 2, 3$ интервальная кусочно-линейная m-поверхность $\hat{\mathbf{L}}$ является интервальной ломаной [6, 10], а $\hat{\mathbf{L}}_k$ – ее звеньями.

Для отображения системы (7) в евклидово пространство воспользуемся отображением $H{:}\mathbf{I}_s\mathbf{R} \to R^2$ [3, 10]. Осуществим отображение $H_n{:}\mathbf{I}_s^n\mathbf{R} \to R^{2n}$,

где $$H_n(U) = H(\langle X_1\rangle) \times H(\langle X_2\rangle) \times \dots \times H(\langle X_n\rangle); \qquad (7)$$

$H(\langle X\rangle) = X$; $X = (x, \nu_x)$; $H_n(U) = (X_1, \dots, X_n)$; $U \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$; $X_i \in R^2$; $i \in J_n$.

В результате отображения (7) система (6) преобразуется в набор из N систем линейных операторных [9] уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^{1k}_{i_1j_1} X_1 + \beta^{1k}_{i_2j_2} X_2 + \ldots + \gamma^{1k}_{i_nj_n} X_n + C^{1k}_1 = 0; \\ \alpha^{2k}_{i_{n+1}j_{n+1}} X_1 + \beta^{2k}_{i_{n+2}j_{n+2}} X_2 + \ldots + \gamma^{2k}_{i_{2n}j_{2n}} X_n + C^{2k}_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{n-m,k}_{i_{q-n+1}j_{q-n+1}} X_1 + \beta^{n-m,k}_{i_{q-n+2}j_{q-n+2}} X_2 + \ldots + \gamma^{n-m,k}_{i_qj_q} X_n + C^{n-m,k}_2 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $U = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in D_k$; $i_m, j_m \in \{1, 2, 3^+, 3^-\}$, $m \in J_q$, $q = (n-m)n$; $D_k \subset R^{2n}$, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ – образ интервального множества $\mathbf{\Omega}_k$ при отображении (8); $\alpha^{1k}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & \nu_{a_{11}} \\ \nu_{a_{11}} & a_{11} \end{pmatrix}$ – оператор вложения [9], применяемый к результату операции интервального умножения $\langle A_1 \rangle * \langle X_1 \rangle$ для случая, когда $\langle A_1 \rangle \in \mathbf{I}_{s_{i_m}}$, $i_m \in \{1, 2, 3^+, 3^-\}$, а интервальная переменная $\langle X_1 \rangle \in \mathbf{I}_{s_{j_m}}$, $j_m \in \{1, 2, 3^+, 3^-\}$ в первом уравнении системы (6); $\alpha^{\eta k}_{11} = \begin{pmatrix} a_{\eta 1} & \nu_{a_{\eta 1}} \\ \nu_{a_{\eta 1}} & a_{\eta 1} \end{pmatrix}$, $\eta = 1, 2, \ldots, n-$ n – в η-м уравнении системы.

Операторы $\beta^{\eta k}_{i_mj_m}, \ldots, \gamma^{\eta k}_{i_mj_m}$, $i_m, j_m \in \{1, 2, 3^+, 3^-\}$, $\eta = 1, 2, \ldots, n-m$, получены из $\alpha^{\eta k}_{i_mj_m}$ заменой $a_{\eta 1}$ на $a_{\eta 2}, \ldots, a_{\eta n}$, $\nu_{a_{\eta 1}}$ на ν_{b_2} или ν_{b_3}:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} X_1 + \beta_{11} X_2 + \ldots + \gamma_{11} X_n = 0, \quad \text{если } U \in R_{11\ldots1}; \\ &\alpha_{11} X_1 + \beta_{12} X_2 + \ldots + \gamma_{11} X_n = 0, \quad \text{если } U \in R_{12\ldots1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $R_{i_1i_2\ldots i_n} = D_k$, где D_k – образ множества $\mathbf{\Omega}_k = \mathbf{I}_{s_i} \times \mathbf{I}_{s_j} \times \ldots \times \mathbf{I}_{s_k}$, $i, j, \ldots, k \in J_3$ при отображении (9).

Операторы в уравнениях определяются, например, так:

$$\alpha_{11} = \begin{pmatrix} a & \nu_a \\ \nu_a & a \end{pmatrix}; \ \alpha_{12} = \begin{pmatrix} a & -\nu_a \\ -\nu_a & a \end{pmatrix}; \ \alpha_{13} = \begin{cases} \alpha^+_{13}, & \text{если} \quad \nu_a \cdot \nu_x \geq 0; \\ \alpha^-_{13}, & \text{если} \quad \nu_a \cdot \nu_x < 0; \end{cases}$$

$$\alpha^+_{13} = \begin{pmatrix} a + |\nu_a| & 0 \\ 0 & a + |\nu_a| \end{pmatrix}; \quad \alpha^-_{13} = \begin{pmatrix} a + |\nu_a| & 0 \\ 0 & a - |\nu_a| \end{pmatrix}, \text{если } (a, \nu_a) \in R^2_{s1}.$$

Для других типов интервальных коэффициентов $\langle A_i \rangle$, $i \in J_n$, образы интервальных поверхностей в пространстве R^{2n} определяются наборами систем линейных уравнений, аналогичными наборам вида (9).

Рассмотрим линейное [11] на всем пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ интервальное отображение

$$\mathbf{f}(U) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_j \cdot \langle X_j \rangle), \tag{10}$$

где $a_j \in R^1$; $j \in J_n$; $U \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$; $\overline{\langle X_i \rangle} = \overline{\langle x_i, \nu_{x_i} \rangle} = \langle x_i, -\nu_{x_i} \rangle$ [3];

$$\varphi\ (a_j \cdot \langle X_j \rangle) = \begin{cases} a_j \cdot \langle X_j \rangle, & \text{если } a_j \ge 0; \\ a_j \cdot \overline{\langle X_j \rangle}, & \text{если } a_j < 0; \end{cases} \quad j \in J_n. \tag{11}$$

Определение 6. Квазилинейной интервальной псевдоповерхностью в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ назовем множество $\tilde{\mathbf{\Pi}} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $k \in J_{n-1}$, заданное интервальным уравнением

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} : \sum_{j=1}^{k} \langle A_{\alpha_j} \rangle * \langle X_{\alpha_j} \rangle + \sum_{j=k+1}^{n} \varphi(a_{\alpha_j} \cdot \langle X_{\alpha_j} \rangle) + \langle C \rangle = \langle 0 \rangle; \tag{12}$$

$$\langle A_{\alpha_j} \rangle = \langle a_{\alpha_j}, \nu_{a_{\alpha_j}} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R};\ \alpha_j \in J_n;\ j \in J_n;\ \langle C \rangle = \langle c, \nu_c \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}.$$

Определение 7. Интервальной m-мерной псевдоплоскостью, или интервальной m-псевдоплоскостью $(m \le n)$ пространства $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, назовем пересечение интервальных псевдогиперповерхностей $\tilde{\mathbf{\Pi}}_i$, $i \in J_{n-m}$, вида (12).

Определение 8. Интервальной псевдопрямой $\tilde{\mathbf{L}} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ называется интервальная m-псевдоплоскость при $m = 1$.

Обозначим множество решений системы (15) на множестве $\mathbf{\Omega}_k \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $\forall k \in J_N$, через $\tilde{\mathbf{L}}_k \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$. Тогда интервальное множество $\tilde{\mathbf{L}} = \bigcup_{k=1}^{N} \tilde{\mathbf{L}}_k \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, следуя работе [9], назовем интервальной псевдопрямой в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, а его подмножества $\tilde{\mathbf{L}}_k \subset \tilde{\mathbf{L}}$, $j \in J_n$ – звеньями интервальной псевдопрямой $\tilde{\mathbf{L}} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$.

Определение 9. Линейной интервальной поверхностью $\mathbf{\Pi} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ назовем интервальную поверхность, которая задается интервальным уравнением вида: $\mathbf{f}(U) + \langle C \rangle = \langle 0 \rangle$, $U \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, где $\langle C \rangle = \langle c, \nu_c \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{f}(U)$ определяется (10).

В пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ линейная интервальная поверхность называется интервальной гиперплоскостью [9].

Следуя [9], интервальное уравнение интервальной гиперплоскости определяет в евклидовом пространстве R^n гиперплоскости:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \xi_i + c = 0, \qquad (13)$$

где $\xi_i \in \{(x_i, \forall i \in J_n) \vee (\nu_{x_i}, \forall i \in J_n)\}$.

Рассмотрим $\mathbf{\Pi}_i : \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_{ij} \cdot \langle X_j \rangle) + \langle C_i \rangle = \langle 0 \rangle$, $i \in J_{n-1}$ [11], причем такие, что их интервальные уравнения являются интервально линейно независимыми.

Определение 10. Интервальной m-плоскостью $(m \le n)$ в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ назовем пересечение интервальных гиперплоскостей $\mathbf{\Pi}_i$, $i \in J_{n-m}$, т.е. множество точек $U \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_{1j} \langle X_j \rangle) + \langle C_1 \rangle = \langle 0 \rangle; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_{n-m,j} \langle X_j \rangle) + \langle C_{n-m} \rangle = \langle 0 \rangle, \end{cases} \qquad (15)$$

где $a_{ij} \in R^1$; $i \in J_{n-m}$; $j \in J_n$.

Решение системы (15) определяется m интервальными параметрами $\langle T_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_m$ и может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} \langle X_1 \rangle - \overline{\langle X_1^0 \rangle} = \sum_{j=1}^{m} \varphi(b_{1j} \langle X_j \rangle); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \langle X_n \rangle - \overline{\langle X_n^0 \rangle} = \sum_{i=1}^{m} \varphi(b_{nj} \langle X_j \rangle), \end{cases} \qquad (16)$$

где $b_{ij} \in R^1; i \in J_n; j \in J_m$.

Выражение (16) назовем интервальными уравнениями интервальной m-плоскости в параметрической форме, а $\langle T_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_m$ – интервальными параметрами интервальной m-плоскости.

Отметим справедливость следующих фактов:

1. Если размерность интервальной плоскости совпадает с размерностью интервального пространства, то ее интервальное уравнение определяет все пространство.

2. Интервальная гиперплоскость в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ имеет размерность $n-1$.

3. Нульмерная интервальная плоскость состоит из одной точки.

4. Одномерной интервальной плоскостью является интервальная прямая.

Определение 11. Интервальной прямой $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, иначе, n-мерной интервальной прямой, назовем интервальную m-плоскость при $m=1$.

Утверждение. Интервальная прямая в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ является пересечением $n-1$ независимых интервальных гиперплоскостей, т.е. интервальная прямая есть множество точек $U \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, удовлетворяющих системе интервальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi(a_{1j} \cdot \langle X_j \rangle) + \langle C_1 \rangle = \langle 0 \rangle; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi(a_{n-1,j} \cdot \langle X_j \rangle) + \langle C_{n-1} \rangle = \langle 0 \rangle, \end{cases} \tag{17}$$

где $a_{ij} \in R^1$; $i \in J_{n-1}$; $j \in J_n$.

На основании свойств операций пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, каждому интервальному уравнению системы (17) поставим в соответствие в евклидовом пространстве R^{2n} систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + c_i = 0; \\ a_{i1}\nu_{x_1} + a_{i2}\nu_{x_2} + \ldots + a_{in}\nu_{x_n} + \nu_{c_i} = 0, \end{cases} \quad \forall i \in J_{n-1}.$$

Таким образом, в R^{2n} системе (17) соответствует такая система:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n}x_n + c_{n-1} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a_{11}\nu_{x_1} + a_{12}\nu_{x_2} + \ldots + a_{1n}\nu_{x_n} + \nu_{c_1} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}\nu_{x_1} + a_{n-1,2}\nu_{x_2} + \ldots + a_{n-1,n}\nu_{x_n} + \nu_{c_{n-1}} = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{18}$$

Найдем решение следующей подсистемы системы (18):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n}x_n + c_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Так как ранг матрицы системы (19) по предположению равен $n-1$, система имеет бесчисленное множество решений, которое обозначим через $l \subset R$. Пусть точка $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in R_X^n$ является решением данной системы, т.е. $X_0 \in l_X$.

Исходя из соотношений (17) и (18), составим интервальные уравнения интервальной прямой в пространстве $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ в виде:

$$\begin{cases} \langle X_1 \rangle - \overline{\langle X_1^0 \rangle} = \varphi(p_1 \cdot \langle T \rangle); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \langle X_n \rangle - \overline{\langle X_n^0 \rangle} = \varphi(p_n \cdot \langle T \rangle); \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle X_1 \rangle = \langle X_1^0 \rangle + \varphi(p_1 \cdot \langle T \rangle); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \langle X_n \rangle = \langle X_n^0 \rangle + \varphi(p_n \cdot \langle T \rangle), \end{cases} \tag{20}$$

где $\langle T \rangle = \langle t, \nu_t \rangle \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$; $U = (\langle X_1 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$; $\langle X_i \rangle = \langle x_i, \nu_{x_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$; $p_i \in R^1$; $i \in J_n$.

Интервальные уравнения (21) назовем интервальными уравнениями интервальной прямой $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ в параметрической форме, а $\langle T \rangle = \langle t, \nu_t \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – интервальным параметром интервальной прямой.

В частности, если $\nu_t = 0$, уравнения (21) имеют вид:

$$\begin{cases} \langle X_1 \rangle = \langle X_1^0 \rangle + p_1 \cdot t; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad t \in R^1. \\ \langle X_n \rangle = \langle X_n^0 \rangle + p_n \cdot t; \end{cases} \tag{21}$$

Заметим, что образами интервальной прямой (22) в пространстве R^n есть прямые, уравнения которых в параметрической форме можно представить:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + p_1 \cdot t; \\ \dots\dots\dots\dots \qquad t \in R^1; \\ x_n = x_n^0 + p_n \cdot t; \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_{x_1} = \nu_{x_1}^0 + p_1 \cdot \nu_t; \\ \dots\dots\dots\dots \qquad \nu_t \in R^1, \\ \nu_{x_n} = \nu_{x_n}^0 + p_n \cdot \nu_t; \end{cases}$$

где $\vec{s} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – направляющий вектор прямой, точка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in l_X \subset R^n$.

Интервальную прямую $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ назовем ориентированной интервальной прямой в $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, если на прямой выбраны начальная точка и направление. Будем говорить, что точки $U_i \in \mathbf{L}$, $i = 1, 2$, связаны соотношением $U_1 <_{\mathbf{L}} U_2$, т.е. U_1 “предшествует” точке U_2, или точка U_2 “следует” за точкой U_1.

Начальной точкой интервальной прямой назовем точку, соответствующую значению интервального параметра $\langle T \rangle = \langle t, \nu_t \rangle = \langle 0 \rangle$.

Если интервальная прямая задается в параметрической форме (21), то направление на ней соответствует непрерывному изменению параметра, иначе, если точке $U_0 \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ сопоставим значение параметра $\langle T_0 \rangle = \langle t_0, \nu_{t_0} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, то для всех $\langle T_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих условию: $\langle T_1 \rangle < \langle T_0 \rangle < \langle T_2 \rangle$, справедливо следующее: либо точка U_1 “предшествует” точке U_0, а точка U_2 “следует” за точкой U_0, т.е. $U_1 <_{\mathbf{L}} U_0 <_{\mathbf{L}} U_2$, либо точка U_2 “предшествует” точке U_0, а точка U_1 “следует” за точкой U_0, т.е. $U_2 < U_0 < U_1$, где $\langle T_i \rangle$ – значение интервального параметра, соответствующее точке U_i.

Пусть даны две точки $U_i \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, $i = 1, 2$, через которые можно провести n-мерную интервальную прямую $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ [5]. Часть интервальной прямой $\mathbf{L}$ между точками U_1 и U_2 называется интервальным отрезком [6], а точки U_1 и U_2 – концами интервального отрезка $[U_1U_2] \subset \mathbf{L}$, иначе

$$\left[U_1U_2\right] = \{U \in \mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R} \,\big|\, (\langle T_1 \rangle \le \langle T \rangle \le \langle T_2 \rangle) \vee (\langle T_2 \rangle \le \langle T \rangle \le \langle T_1 \rangle)\}.$$

Выводы. ***Научная новизна*** работы состоит в том, что впервые введены понятия интервальной m-плоскости интервальной m-плоскости, интервальной псевдопрямой и интервальной прямой в многомерном интервальном пространстве. Это позволит строить математические модели многомерных геометрических объектов с кусочно-линейной границей, а также моделировать их взаимодействие при решении оптимизационных задач размещения с учетом погрешностей исходных данных средствами интервальной геометрии. ***Практическая ценность***. Полученные в статье результаты могут быть использованы при математическом и компьютерном моделировании интервальных геометрических объектов с кусочно-линейной границей и их взаимодействий (включения, пересечения, касания, непересечения), а также при моделировании и решении задач компоновки сложных объектов, допускающих аппроксимацию объектами, имеющими кусочно-линейную границу, с учетом погрешностей исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.*
2. *Стоян Ю.Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Доклады НАН Украины. Сер.А. – 1996. – № 7. – С. 23 – 25.*
3. *Koucher E. Interval Analysis in the Exlended Interval Space **IR** // Comp. Suppl. 1980. – № 2. – P. 33 – 49.*
4. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей. // Докл. НАН Украины. – 1997. – № 7. – С. 56 – 59.*
5. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю.А. Математическая модель оптимизационной задачи размещения правильных многоугольников с учетом погрешностей исходных данных. // Докл. НАН Украины. – 1998. – № 5. – С. 104 – 111.*
6. *Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Интервальная математическая модель задачи цветной упаковки прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных. // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 3. – С. 18 – 25.*
7. *Романова Т.Е. Интервальное пространство* $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ *// Доклады НАН Украины. – 2000. – № 9. – С. 36 – 41.*
8. *Стоян Ю.Г. Квазилинейные интервальные отображения. Интервальная метрика. – Х., 1995. – 23 с. (Препр./ НАН Украины. Институт проблем машиностроения; № 387).*
9. *Стоян Ю.Г. Интервальное пространство* $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$. *Интервальные уравнения // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 109 – 116.*
10. *Гребенник И.В., Евсеева Л.Г., Романова Т.Е. Интервальная прямая в пространстве* $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ *// Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 2. – С. 57 – 63.*
11. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 542 с.*
12. *Стоян Ю.Г. Интервальные отображения // Доклады НАН Украины. Сер.А. – 1996. – № 10. – С. 57 – 61.*
13. *Гребенник И.В., Романова Т.Е. Интервальная гиперплоскость в пространстве* $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ *// Проблемы машиностроения. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 52 – 56.*

Поступила 16.11.2004

РОМАНОВА Татьяна Евгеньевна, *доктор техн. наук, старший научный сотрудник Института проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного. Окончила ХИРЭ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.*

ЕВСЕЕВА Людмила Григорьевна, *канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории Полтавского военного института связи. Окончила ХГУ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.*

ШЕХОВЦОВ Сергей Борисович, *канд. техн. наук, доцент, зав. кафедры прикладной математики Университета внутренних дел Украины. Окончил ХИРЭ. Область научных интересов – математическое моделирование, вычислительные методы.*