УДК 537.874

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ИМПЕДАНСНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ОБЪЕКТЕ, ПОГРУЖЕННОМ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

к.т.н. А.В. Музыченко, к.т.н. А.З. Сазонов, д.т.н., проф. О.И. Сухаревский

*Рассматривается двумерная задача рассеяния плоской монохроматической электромагнитной волны на импедансном круговом цилиндре, погруженном в диэлектрическое дисперсионное полупространство. Получены асимптотические соотношения, описывающие рассеянное поле.*

**Постановка проблемы.** Задача рассеяния плоской монохроматической электромагнитной волны (ЭМВ) на хорошо проводящем цилиндрическом объекте больших электрических размеров, находящемся в диэлектрическом полупространстве (в частности, с параметрами грунта), представляет интерес для ряда практических приложений. В частности, такая задача возникает при зондировании подземных трубопроводов различного назначения.

**Анализ последних достижений и публикаций.** При решении поставленной задачи авторы опирались на результаты, полученные в работах [1, 2], где выведены соотношения, описывающие рассеянное подповерхностным идеально проводящим цилиндрическим объектом поле. Упомянутые соотношения не позволяют учитывать в расчетах проводимость (импеданс) материала, из которого выполнен рассеиватель.

**Формулирование цели статьи.** Целью статьи является получение асимптотических соотношений для определения электромагнитного поля (ЭМП), рассеянного погруженным в диэлектрическое дисперсионное поглощающее полупространство импедансным цилиндрическим объектом больших электрических размеров.

**Изложение основного материала.** *Основные расчетные соотношения.* В статье рассматривается бесконечный импедансный (с проводимостью $\sigma$) цилиндрический рассеиватель с поверхностью, ограниченной контуром $L$, верхняя точка которого находится на глубине $d$ в однородном полупространстве $V_2$ (с электрическими параметрами $\varepsilon_2$, $\mu_2$) с границей $L_2$, характеризуемом волновым числом $k_2$ (в общем случае комплексным). Полупространство $V_2$ граничит с полупространством $V_1$, имеющим электрические параметры свободной среды $\varepsilon_0$, $\mu_0$. Границей раздела сред является плоскость $L_1$. Из полупространства $V_1$ на границу раздела по нормали к $L_1$ падает плоская монохроматическая ЭМВ единичной амплитуды, длина которой много меньше характерного радиуса кривизны поверхности рассеивателя. Требуется определить поле, рассеянное цилиндром, в точке наблюдения, расположенной над центром сечения цилиндра на большой высоте в полупространстве $V_1$.

Для решения задачи выберем декартову систему координат $OXYZ$ с началом в верхней точке поверхности рассеивателя. Орт оси $OY$ направлен вертикально вверх, а орт оси $OZ$ – вдоль образующей цилиндра.

Воспользуемся интегральным представлениям для полного ЭМП в присутствии цилиндрического объекта, погруженного в полупространство $V_2$ [3]:

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + \int\limits_L \left[ u(\vec{\xi}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{\xi})}{\partial n} - G(\vec{r}, \vec{\xi}) \frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial n} \right] dl_\xi , \qquad (1)$$

здесь функции $u$, $u_0$ – z-компоненты вектора электрической напряженности (в случае E – поляризация) либо вектора магнитной напряженности (H-поляризация) полного и первичного полей, соответственно; при этом $u_0(\vec{r}) = pe^{-ik_2(y-d)}$; $p$ – коэффициент прохождения ЭМВ в полупространство $V_2$; функция $G(\vec{r}, \vec{\xi})$ – функция Грина для полупространства $V_2$ в отсутствие рассеивателя; радиус-вектор $\vec{r}$ характеризует положение точки наблюдения искомого поля с координатами $(x_0, y_0)$; $\vec{\xi}$ – радиус-вектор точки контура $L$ с координатами $(x, y)$; $dl_\xi$ – элемент длины дуги контура $L$.

Рассмотрим вначале решение задачи для случая E- поляризации падающей ЭМВ, т.е. для случая, когда вектор электрической напряженности параллелен образующим цилиндра.

Соответствующее граничное условие имеет вид [4]:

$$\frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial n} - ik_2 \frac{W_2}{W} u(\vec{\xi}) = 0 \text{, при } \vec{\xi} \in L ,$$

где $W_2 = 120\pi\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$ – волновое сопротивление полупространства $V_2$;

$W = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{4\pi\sigma}}$ – импеданс рассеивателя.

Приведенное граничное условие может быть записано в виде

$$u(\vec{\xi}) = \frac{1}{ik_2}\alpha\frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial n}, \text{ где } \alpha = \frac{W}{W_2} \ll 1.$$

С учетом этого интегральное представление для полного поля примет вид

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + \int_L \left[ \frac{\alpha}{ik_2}\frac{\partial G(\vec{r},\vec{\xi})}{\partial n} - G(\vec{r},\vec{\xi}) \right] \frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial n} dl_\xi . \quad (2)$$

Отсюда следует, что для решения задачи необходимо определить в точках контура L значение функции $\frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial n}$. В рассматриваемом случае Е-поляризации функция пропорциональна плотности поверхностного тока. Для ее нахождения продифференцируем выражение (2) по нормали $\vec{n}$ к цилиндру и устремим точку наблюдения (по нормали) на поверхность рассеивателя. В результате, с учетом свойства нормальной производной потенциала простого слоя, получим уравнение для плотности поверхностного тока

$$v(\vec{\tau}) = 2v_0(\vec{\tau}) + 2\frac{\partial}{\partial n_\tau}\int_L \frac{\alpha}{ik_2}\frac{\partial G(\vec{\tau},\vec{\xi})}{\partial n_\xi} v(\vec{\xi}) dl_\xi - 2\int_L \frac{\partial G(\vec{\tau},\vec{\xi})}{\partial n_\tau} v(\vec{\xi}) dl_\xi , \quad (3)$$

где $\vec{\tau} = (x_1, y_1)$ – радиус-вектор точки наблюдения на поверхности цилиндра, $\vec{n}_\tau$ – нормаль в этой точке, $v_0(\vec{\tau}) = \frac{\partial u_0(\vec{\tau})}{\partial n}$, $v(\vec{\tau}) = \frac{\partial u(\vec{\tau})}{\partial n}$.

В случае идеально проводящего рассеивателя ($\alpha = 0$) доказана [5] асимптотичность получающихся формул. Поэтому можно ожидать, что и в случае достаточно малых $\alpha$ формулы, получающиеся с помощью итерирования уравнения (3) дают правильное асимптотическое разложение решения. Ограничившись двумя итерациями, можно записать соотношение

$$v(\vec{\tau}) \approx 2v_0(\vec{\tau}) + 4\frac{\partial}{\partial n_\tau}\int_L \frac{\alpha}{ik_2}\frac{\partial G(\vec{\tau},\vec{\xi})}{\partial n_\xi} v_0(\vec{\xi}) dl_\xi - 4\int_L \frac{\partial G(\vec{\tau},\vec{\xi})}{\partial n_\tau} v_0(\vec{\xi}) dl_\xi . \quad (4)$$

Формула (4) позволяет вычислить значения плотности тока в точках на поверхности рассеивателя, подставив которые в соотношение (2), можно найти искомое рассеянное поле по формуле:

$$u_{расс}(\vec{r}) = u(\vec{r}) - u_0(\vec{r}) = \int_L \left[ \frac{\alpha}{ik_2}\frac{\partial G(\vec{r},\vec{\xi})}{\partial n} - G(\vec{r},\vec{\xi}) \right] \frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial n} dl_\xi . \quad (5)$$

Функция $G(\vec{r},\vec{\xi})$ в данном случае (точка наблюдения $\vec{r}$ находится в свободном полупространстве, точка интегрирования $\vec{\xi}$ – в $V_2$) имеет вид [3]:

$$G(\vec{r},\vec{\xi}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\eta_1(y_0+d)} e^{\eta_2(y-d)} \frac{\cos\lambda(x-x_0)}{\eta_1+\eta_2} d\lambda; \quad \eta_i = \sqrt{\lambda^2 - k_i^2}; \quad i = 1,2. \quad (6)$$

Согласно сделанным предположениям точка наблюдения находится на большом расстоянии от границы раздела сред. Очевидно (в силу вещественности $k_2$), что основной вклад в интеграл будет вносить окрестность точки $\lambda = 0$ [6] и данный интеграл может быть асимптотически вычислен методом стационарной фазы, а формула (5) при этом примет вид:

$$u_{расс}(\vec{r}) = \Omega(y_0)\int_L e^{-ik_2 y} v(\vec{\xi}) dl_\xi; \; \Omega(y_0) = (1-\alpha)\frac{e^{ik_1(y_0+d)}}{\sqrt{y_0+d}}\sqrt{\frac{k_1}{2\pi}}\frac{e^{ik_2 d}}{k_1+k_2} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (7)$$

В [1] показано, что интеграл в (7) может быть вычислен методом стационарной фазы и при этом основной вклад в интеграл будет вносить малая окрестность точки $x = 0$ – так называемая "блестящая" линия на поверхности цилиндра. Аппроксимация поверхности рассеивателя в этой окрестности соприкасающимся параболоидом $y = -ax^2$ приведет к формуле

$$u_{расс}(\vec{r}) = \Omega(y_0)\int_L e^{ik_2 ax^2} v(\vec{\xi}) dl_\xi.$$

Далее, как и в работе [1], рассмотрим круговой цилиндр радиуса $R$, для которого коэффициент в уравнении аппроксимирующего параболоида имеет значение $a = 1/2R$. В этом случае выражение для искомого поля примет вид

$$u_{расс}(\vec{r}) \approx \Omega(y_0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\frac{k_2 x^2}{2R}} v(x,y) dx.$$

Таким образом, для расчета $u_{расс}(\vec{r})$ необходимо вычислить функцию $v(x,y)$ в окрестности точки $x = 0$.

Для этого используется соотношение (4). В этом случае, когда и точка наблюдения $\vec{\tau}$, и точка интегрирования $\vec{\xi}$ находятся в полупространстве $V_2$, функция Грина принимает следующий вид [3]:

$$G(\vec{\tau},\vec{\xi}) = G_0(\vec{\tau},\vec{\xi}) + G_1(\vec{\tau},\vec{\xi}), \quad (8)$$

где $G_0(\vec{\tau},\vec{\xi}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k_2 h)$; $G_1(\vec{\tau},\vec{\xi}) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\eta_2(y+y_1-2d)} \cos\lambda(x-x_1)\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\frac{d\lambda}{\eta_2}$;

$h$ – расстояние между точками $\vec{\tau}$ и $\vec{\xi}$; $H_0^{(1)}(k_2 h)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка; $(x_1, y_1)$ – координаты точки наблюдения $\vec{\tau}$; $(x, y)$ – координаты точки интегрирования $\vec{\xi}$.

Проделав преобразования, аналогичные выполненным в [1], получим следующее выражение для плотности поверхностного тока в окрестности "блестящей" линии:

$$v(\vec{\tau}) \approx 2ik_2 e^{-ik_2(y-d)} p\left(1+\frac{\alpha-1}{2ik_2R}+(\alpha-1)\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{ik_2 2d}\sqrt{\frac{R}{R+4d}}\left(1+\frac{y}{R+4d}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{ik_2(R+4d)}\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{ik_2 2d}\sqrt{\frac{R}{R+4d}}\left(1+\frac{3y}{R+4d}\right)\right).$$

Подставив это выражение в формулу (7), и, проведя асимптотическую оценку полученного интеграла, получим следующее выражение для поля, рассеянного импедансным круговым цилиндрическим объектом, находящимся в диэлектрическом полупространстве, для случая E – поляризации:

$$u_{\text{расс}}(\vec{r}) = -\frac{e^{ik_1(y_1+d)}}{\sqrt{y_1+d}}\frac{e^{i2k_2d}}{k_1+k_2}\sqrt{2k_1k_2R}\,p\left(1-\alpha+i\frac{(1-2\alpha)}{2k_2R}-\right.$$
$$\left.-\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\sqrt{\frac{R}{R+4d}}e^{i2k_2d}\left(1-i\frac{1}{4k_2(R+4d)}-\alpha\frac{3-4k_2(R+4d)}{2k_2(R+4d)}\right)\right)+O\left(\alpha^2\right). \quad (9)$$

При $\alpha = 0$ выражение (9) переходит в соответствующее выражение для идеально проводящего рассеивателя [1].

Проанализируем полученную формулу. В ее структуре можно выделить несколько слагаемых. Рассмотрим каждое из них в отдельности.

Первый сомножитель перед скобками указывает на то, что рассеянное поле носит характер цилиндрической волны, распространяющейся от "блестящей" линии на поверхности цилиндрического рассеивателя. Множитель $e^{i2k_2d}$ перед скобками описывает набег фазы и затухание ЭМВ при распространении от границы раздела до рассеивателя и обратно.

Первое слагаемое в скобках отвечает рассеянному полю в приближении физической оптики с поправкой на импедансный характер рассеивателя.

Второе слагаемое представляет поправку к первому, учитывающую искривленность поверхности рассеивателя. Кроме этого оно имеет множитель $(1-2\alpha)$, который для рассматриваемого случая соответствует коэффициенту отражения ЭМВ [7].

Третье слагаемое учитывает однократное переотражение рассеянной волны между границей раздела сред и поверхностью рассеивателя, а также поправку за счет кривизны поверхности рассеивателя. Об этом свидетельствует наличие множителя $(k_1-k_2)/(k_1+k_2)$, который для диэлектрического полупространства $V_2$ (т.е. когда $\mu \approx 1$) описывает коэффициент отражения ЭМВ при падении со стороны $V_2$, а также множителя $e^{i2k_2 d}$, которым учитывается дополнительные набег фазы и затухание переотраженной волны по сравнению с отраженной. Сомножитель $\sqrt{R/(R+4d)}$ описывает влияние отношения глубины погружения рассеивателя к его радиусу на интенсивность переотраженного поля.

Перейдем теперь к рассмотрению случая H-поляризации падающей волны (вектор магнитной напряженности поля параллелен образующим цилиндра). В данном случае импедансное граничное условие может быть записано в виде

$$\frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial n} = ik_2 \alpha u(\vec{\xi}).$$

Подставив его в интегральное представление (1), получим следующее выражение для определения рассеянного поля:

$$u_{расс}(\vec{r}) = \int_L \left[ \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{\xi})}{\partial n} - ik_2 \alpha G(\vec{r}, \vec{\xi}) \right] u(\vec{\xi})\, dl_{\xi}\,. \tag{10}$$

Выражение для поля в точках на границе поверхности рассеивателя $u(\vec{\xi})$ получается аналогично случаю E-поляризации и имеет вид

$$u(\vec{\tau}) \approx 2u_0(\vec{\tau}) + 4\int_L \left[ \frac{\partial G(\vec{\tau}, \vec{\xi})}{\partial n} - ik_2 \alpha G(\vec{\tau}, \vec{\xi}) \right] u_0(\vec{\xi})\, dl_{\xi}. \tag{11}$$

Асимптотические вычисления интегралов в правой части формулы (11) по аналогии со случаем E-поляризации с последующей подстановкой результата в (10) приведет к следующему выражению для рассеянного поля в случае H-поляризации:

$$\begin{aligned} u_{расс}(\vec{r}) = {} & \frac{e^{ik_1(y_0+d)}}{\sqrt{y_0+d}} \frac{e^{i2k_2 d}}{k_1+k_2} \sqrt{2k_1 k_2 R p} \left( 1 + i\frac{(1-\alpha)}{2k_2 R} + \right. \\ & \left. + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \sqrt{\frac{R}{R+4d}} e^{i2k_2 d} \left( 1 + \frac{1}{4k_2(R+4d)} \right) \right) + O(\alpha^2). \end{aligned} \tag{12}$$

Физический смысл составляющих полученного соотношения аналогичен рассмотренному в случае E-поляризации.

Сравнительный анализ формул (9) и (12) позволяет сделать вывод о более слабом влиянии величины проводимости материала рассеивателя на величину рассеянного поля при H-поляризации падающей волны. В этом случае физоптическое слагаемое, а также составляющая, описывающая переотраженное поле и поправку его за счет кривизны поверхности рассеивателя, полностью соответствуют аналогичным компонентам в выражениях для идеально проводящего рассеивателя [1]. При этом в случае Е-поляризации влияние проводимости материала рассеивателя сказывается во всех трех составляющих рассеянного поля (в отличие от случая Н-поляризации).

**Выводы.** Таким образом, в статье получены простые, имеющие ясный физический смысл и пригодные для инженерных расчетов, соотношения для ЭМП, рассеянного круговым импедансным цилиндром больших электрических размеров, погруженным в диэлектрическое дисперсионное (в общем случае – с потерями) полупространство для случаев Е- и Н-поляризации первичного поля.

### ЛИТЕРАТУРА


1. *Сухаревский О.И., Музыченко А.В., Сазонов А.З. Радиофизика. – 2002. – Т. 7, № 1. – С. 28 – 36.*
2. *Sukharevsky O.I., Muzychenko A.V., Sazonov A.Z. Proceedings of the International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kiev, 2002. – P. 296 – 298.*
3. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 167 с.*
4. *Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.*
5. *Фундаментальные и прикладные задачи теории рассеяния электромагнитных волн / Сиренко Ю.К., Сухаревский И.В., Сухаревский О.И., Яшина Н.П.; под ред. Сиренко Ю.К. – Х.: Крок, 2000. – 344 с.*
6. *Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М:. Наука, 1987. – 544 с.*
7. *Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 544 с.*



*Поступила 30.07.2004*



***МУЗЫЧЕНКО Андрей Владимирович***, *кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник – зам. нач. отдела Объединенного научно-исследовательского института Вооруженных Сил. В 1995 году окончил Харьковский военный университет. Область научных интересов – вторичное излучение радиолокационных объектов, вычислительные методы в электродинамике.*

***САЗОНОВ Александр Захарович***, *кандидат технических наук, директор завода агрегатных станков. В 1987 году окончил военную инженерную радиотехническую академию ПВО. Область научных интересов – вторичное излучение радиолокационных объектов, вычислительные методы электродинамики.*

***СУХАРЕВСКИЙ Олег Ильич***, *доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Объединенного научно-исследовательского института Вооруженных Сил. В 1972 году окончил Харьковский государственный университет. Область научных интересов – математические методы теории дифракции и теории антенн, радиолокационные характеристики объектов.*