УДК 517.968

КРИТЕРИАЛЬНЫЙ МЕТОД В АНАЛИЗЕ ПРОГРАММ РАЗВИТИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В.П. Марченко
(представил д.т.н., проф. В.А. Краснобаев)

Предложен подход к анализу программ развития сложных систем с использованием метода критериального программирования.

Постановка проблемы. В работах [1 – 3] показано, что анализ, прогнозирование и оценку программ развития сложных систем (СС) необходимо проводить в условиях многовариантности компромисности и многофакторности с привлечением значительного объема информации. Вместе с тем динамика усложнения СС и сокращение временных интервалов на принятие решений, в настоящее время требует достаточно простых, эффективных и оперативных методов анализа. Значительный рост общего информационного потока о существующих СС позволяет для анализа использовать положения теории подобия. Будем полагать, что первичная выборка оптимальных подобных вариантов СС в общем случае определена экспертными заключениями. Далее, исходя из того, что всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено зависимостью между критериями подобия, т.е. уравнением, связывающим безразмерные величины, полученные из участвующих в процессе параметров, строим зависимости между полученными безразмерными величинами и проводим анализ.

Цель статьи. Рассмотрим возможность анализа предполагаемой целевой функции на уровне безразмерных величин (критериев подобия). Представим целевую функцию в виде

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}, \tag{1}$$

где y – некоторый обобщенный технико-экономический показатель, характеризующий исследуемый процесс; a_i, α_{ji} – постоянные коэффициенты, определяемые свойствами системы; x_j – переменные параметры системы.

Из (1) получим критериальное уравнение процесса. Для этого все члены исследуемого уравнения приведем к безразмерному виду делением на один из них (методом относительных единиц) и определим критерий подобия. Наиболее информативны критерии подобия, полученные при делении левой и правой частей (1) на обобщенный показатель y. Преобразуем (1), разделив обе части уравнения на y, получим

$$1=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{y}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}.$$

Согласно методу интегральных аналогов [4], выражения

$$\pi_1=\frac{a_1\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{j1}}}{y};\ \pi_2=\frac{a_2\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{j2}}}{y};\ \ldots;\ \pi_m=\frac{a_m\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{jm}}}{y} \qquad (2)$$

являются критериями подобия, и соответствующее критериальное уравнение запишется следующим образом:

$$1=\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_m. \qquad (3)$$

В данном уравнении значения критериев подобия пронормированы и они указывают на относительную долю каждой составляющей в обобщенном технико-экономическом показателе системы y.

Для сравнения полученного варианта с каким-либо другим и выбора лучшего из них, установим базисный вариант с параметрами y_δ, $x_{1\delta}$, $x_{2\delta}$, …, $x_{n\delta}$, которые связаны условием

$$y_\delta=\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j\delta}^{\alpha_{ji}}.$$

Критерии подобия в данном случае имеют вид:

$$\pi_{1\delta}=\frac{a_1\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j\delta}^{\alpha_{j1}}}{y_\delta};\ \pi_{2\delta}=\frac{a_2\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j\delta}^{\alpha_{j2}}}{y_\delta};\ \ldots;\ \pi_{m\delta}=\frac{a_m\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j\delta}^{\alpha_{jm}}}{y_\delta}. \qquad (4)$$

Разделив почленно левые и правые части (1) на y_δ, получим

$$\frac{y}{y_\delta}=a_1\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{j1}}\Bigg/\left(a_1\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j\delta}^{\alpha_{j1}}\Big/\pi_{1\delta}\right)+\ldots+a_m\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{jm}}\Bigg/\left(a_m\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j\delta}^{\alpha_{jm}}\Big/\pi_{m\delta}\right)$$

или

$$y_*=\pi_{1\delta}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j*}^{\alpha_{j1}}+\pi_{2\delta}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j*}^{\alpha_{j2}}+\ldots+\pi_{m\delta}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j*}^{\alpha_{jm}},\ \left(y_*=\frac{y}{y_\delta};\ x_{j*}=\frac{x_j}{x_{j\delta}}\right). \qquad (5)$$

Сформулируем задачу поиска экстремума функции y следующим образом:

$$y=\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}\to\min\ \text{при}\ x_j>0. \qquad (6)$$

Если функция y выпукла и дифференцируема на рассматриваемом интервале значений переменных x_j, то данная задача решается, исходя из следующих условий:

$$\frac{\partial y}{\partial x_s}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{si}\,\frac{a_i}{x_s}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}=0,\qquad s=1\div n.$$

Преобразуем это выражение в критериальную форму. Умножив его левую и правую части на x_s/y_{min}, получим

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{si}\,\frac{a_i\prod\limits_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}}{y_{min}}=0,\qquad s=1\div n,$$

а с учетом (4):

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{si}\pi_{io}=0,\qquad s=1\div n. \tag{7}$$

Если рассматривать (7) как скалярное произведение двух векторов α_s и π, то эти векторы ортогональны в силу равенства нулю выражения. В выражении (7) критерии подобия π_{i0} характеризуют исследуемую систему в состоянии, соответствующем минимуму показателя ее оптимальности y. Таким образом, совместно с (3) условие минимума функции запишется так:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}\pi_{io}=0,\quad j=1\div n;\qquad \sum_{i=1}^{m}\pi_{io}=1. \tag{8}$$

Решая систему уравнений (8) относительно π_{i0} и воспользовавшись соотношением (5) можно определить изменение y относительно y_{min} при отклонении x_i от x_{io} на заданный процент. Заметим, что критериальный анализ выполняется без определения y_{min} и соответствующих x_{io}.

Но так просто задача решается только при определенном сочетании числа членов математической модели – m и числа переменных x_j – n. Из (8) видно, что система уравнений относительно π определена только при t = m – n – 1 = 0. Показатель t называется степенью трудности. Если он не равен нулю, рассмотренный подход использовать нельзя. В этом случае требуются дополнительные исследования:

$$y_*=\pi_{1\delta}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j*}^{\alpha_{ji}}+\pi_{2\delta}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j*}^{\alpha_{ji}}+\ldots+\pi_{m\delta}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j*}^{\alpha_{ji}}.$$

Обобщим задачу минимизации (6) дляопределенных функциональных ограничений:

$$y = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \to \min \qquad (9)$$

при условиях

$$g_к = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \cdot \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_{ji}} \le G_k, \quad k = \overline{1,p} \qquad (10)$$

$$x_j > 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

В (9) и (10) принята сплошная индексация слагаемых целевой функции и ограничений.

Будем искать минимум функции Лагранжа, которую можно записать (согласно теореме Куна-Таккера [4]) следующим образом:

$$L(x,\mu) = y + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \cdot (g_k - G_k), \quad \mu_k \ge 0,$$

где μ_k – неопределенные множители Лагранжа.

Функция $L(x,\mu)$ достигает экстремума при условии равенства нулю частных производных от L по всем переменным x и μ_k:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_s} = \dfrac{1}{x_s} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_{si} a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} + \sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \alpha_{si} a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \right) = 0, \; s = 1 \div n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_k} = \sum\limits_{k=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} - G_k = 0, \qquad k = 1 \div p. \end{cases} \qquad (11)$$

Умножим левые и правые части первых n выражений на x_s/y_{min}. Тогда с учетом (4) получим

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{si} \cdot \Pi_{io} = 0, \quad s = 1 \div n, \qquad (12)$$

где m – суммарное число членов целевой функции и ограничений;

$$\pi_{io} = \begin{cases} \dfrac{a_i}{y_{min}} \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{jo}^{\alpha_{ji}}, \quad i = 1 \div m_1; \\ \dfrac{\mu_{ko}}{y_{min}} \cdot a_i \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{jo}^{\alpha_{ji}}, \quad i = m_k + 1 \div m_{k+1}, \quad k = 1 \div p. \end{cases} \qquad (13)$$

Запишем условие нормировки для функции Лагранжа, используя метод интегральных аналогов [5]:

$$1=\sum_{i=1}^{m_1}\frac{a_i}{y_{min}}\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{jo}^{\alpha_{ji}}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\mu_{ko}}{y_{min}}\cdot\left(g_k-G_k\right).$$

Согласно теореме Куна-Таккера [4] $\mu_{ko}\cdot\left(g_k-G_k\right)=0,$ т.е. условие принимает вид (нормируются критерии подобия только целевой функции):

$$1=\sum_{i=1}^{m_1}\pi_{io}, \tag{14}$$

Далее исследуем связь между критериями подобия ограничений. Для этого сначала определим значения множителей Лагранжа μ_k. Известно [4], что в точке относительного минимума градиенты функций $y'(x)$ и $g'(x)$ направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, т.е. $y'(x)=-\mu_k\cdot g_k'(x).$ Отсюда

$$\mu_k=-\frac{y'(x_0)}{g_k'(x_0)},\quad k=1\div p. \tag{15}$$

Запишем значения градиентов $y'(x)$ и $g'(x)$ через логарифмические производные и подставим их в (15). Тогда

$$\mu_k=-\frac{y(x)}{g'(x)}\cdot\frac{d\ln y(x)}{d\ln g_k(x)}\Bigg|_{x=x_0};\ \lambda_k=-\frac{d\ln y(x)}{d\ln g_k(x)}\Bigg|_{x=x_0} \tag{16}$$

и λ_k является коэффициентом чувствительности k-го ограничения и выражает относительное увеличение $y(x_0)$ при единичном относительном уменьшении значения $g_k(x_0)$, если это ограничение активно.

Если ограничение неактивно, то $\lambda_k=0$, так как такое ограничение не влияет на значение целевой функции y(x) [5].

С учетом (16) для активных ограничений

$$\mu_{k0}=\frac{y(x_0)}{G_k}\cdot\lambda_k,$$

т.е.

$$\lambda_k=\frac{\mu_{k0}}{y(x_0)}\cdot G_k \tag{17}$$

и λ_k можно рассматривать как нормированный множитель Лагранжа.

Воспользовавшись соотношением $\mu_{k0}\cdot(g_k-G_k)=0,$ или

$$\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\frac{\mu_{k0}}{y_{min}}\cdot a_i\cdot\prod_{j=1}^{n}x_{j0}^{\alpha_{ji}}=\frac{\mu_{k0}}{y_{min}}\cdot G_k=\lambda_k$$

с учетом (13) получим

$$\lambda_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{io}. \tag{18}$$

Из последнего видно, что нормированный множитель Лагранжа λ_k представляет собой сумму критериев подобия k-го ограничения.

Полученные результаты для критериев подобия дают возможность записать функцию Лагранжа в критериальной форме. Однако для применений интерес представляет исследование области условного минимума функции y, а не безусловного минимума. Поэтому оправдана раздельная запись исходной функции y и ограничений g_k в относительных единицах.

Учитывая сделанное замечание и методы, изложенные в предыдущем материале, получим:

$$\begin{cases} y_* = \sum\limits_{i=1}^{m_1} \pi_{io} \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j*0}^{\alpha_{ji}}; & (19) \\ g_{k*} = \sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{io} \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j*0} \le \lambda_k, \quad k = \overline{1,p}. & (20) \end{cases}$$

Эти соотношения позволяют выявить изменения величины целевой функции и ограничений при отклонении x_j от x_{j0}.

Выводы. Изложенное подтверждает возможность анализа целевой функции (1) на уровне безразмерных величин (критериев подобия). Интерес представляет также то, что при $t = m - n - 1 = 0$, критерии подобия могут быть найдены без значения коэффициентов a_i.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвиркун А.Д., Акинфиев В.К. Структура многоуровневых и крупномасштабных систем. Синтез и планирование развития. – М.: Наука, 1993. – 160 с.*
2. *Мазур И.И., Шапиро В.Д., Ольдерогге Н.Г. Управление проектами. – М.: Экономика, 2001. – 574 с.*
3. *Ларычев О.И. Теория и методы принятия решений. – М.: Лагос, 2002. – 392 с.*
4. *Кузнецов Ю.Н. и др. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1976. – 352 с.*
5. *Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высш. шк., 1976. – 476 с.*

Поступила 17.08.2004

***МАРЧЕНКО Василий Петрович**, начальник НИЛ ИВЦ ХВУ. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – системный анализ.*