УДК 681.3

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПЕРЕСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБОБЩЕННОЙ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ СПЕЦПРОЦЕССОРОВ С ДЕГРАДИРУЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

к.т.н. И.А. Калмыков
(представил д.т.н., проф. В.В. Федоренко)

Предложена математическая модель пересчета коэффициентов обобщенной полиадической системы (ОПС) для спецпроцессора с деградируемой структурой, функционирующего в полиномиальной системы класса вычетов (ПСКВ).

Постановка задачи. Создание и использование параллельных вычислительных структур при реализации задач цифровой обработки сигналов (ЦОС) в основном связано с необходимостью повышать быстродействие, отказоустойчивость и живучесть систем. Особое место среди таких структур занимает полиномиальная система класса вычетов (ПСКВ) в расширенных полях Галуа $GF(p^v)$. Модульность ПСКВ позволяет осуществлять цифровую обработку сигналов на основе целочисленных операций в реальном масштабе времени. Кроме того, вычислительная система, функционирующая в ПСКВ, обладает потенциальными возможностями по обеспечению живучести при возникновении отказов в процессе функционирования. Данная система способна сохранять работоспособное состояние за счет перераспределения вычислительных ресурсов между оставшимися в исправном состоянии вычислительными трактами. Как правило, для определения отказавшего основания используется позиционная характеристика – коэффициенты обобщенной полиадической системы счисления (ОПС). В то же самое время при реконфигурации архитектуры спецпроцессора (СП) ПСКВ возникают трудности вычисления коэффициентов ОПС для определения местоположения и глубины ошибки в деградируемой структуре устройства при возникновении отказа, а также при переводе результата вычислений из непозиционного кода в позиционную систему счисления (ПСС). Поэтому задача разработки математической модели пересчета коэффициентов ОПС при постепенной деградации структуры СП ПСКВ является актуальной.

Решение. Большая вычислительная сложность задач цифровой обработки сигналов (ЦОС) предопределяет необходимость использования параллельных вычислительных структур, в частности полиномиальной системы класса вычетов (ПСКВ). Модульность ПСКВ позволяет осуществлять цифровую обработку сигналов на основе целочисленных операций в реальном масштабе времени [1, 2, 3]. В качестве оснований в данной алгебраической системе выбраны минимальные многочлены $p_i(z)$ поля $GF(p^{\nu})$. В этом случае любой полином $A(z)$, удовлетворяющий условию $A(z) \in P_{полн}$, где

$$P_{полн} = \prod_{i=1}^{n} p_i(z) = z^{p^{\nu}-1} - 1 \tag{1}$$

можно представить в виде n-мерного вектора

$$A(z) = \left(\alpha_1(z), \alpha_2(z), \dots, \alpha_n(z)\right), \tag{2}$$

где $\alpha_i(z) \equiv A(z) \bmod p_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n.$

Ортогональные преобразования сигналов, определяемые над расширенными полями Галуа $GF(p^{\nu})$, в отличие от дискретного преобразования Фурье (ДПФ) характеризуются целым рядом достоинств: отсутствием в силу специфики арифметики конечных полей шума округления; снижением объема вычислений при их реализации; сохранением при вычислениях ассоциативного и коммутативного законов арифметических операций суммы и умножения по модулю, а также дистрибутивного закона операции умножения по отношению к сложению.

Если на диапазон возможного изменения кодируемого множества полиномов наложить ограничения, то есть выбрать k из n оснований ПСКВ ($k < n$), то это позволит осуществить разбиение полного диапазона $P_{полн}(z)$ расширенного поля Галуа $GF(p^{\nu})$ на два непересекающихся подмножества. Первое подмножество называется рабочим диапазоном и определяется выражением

$$P_{раб}(z) = \prod_{i=1}^{k} p_i(z). \tag{3}$$

Многочлен $A(z)$ с коэффициентами из поля $GF(p)$ будет считаться разрешенным в том и только том случае, если он принадлежит рабочему диапазону $A(z) \in P_{раб}(z)$. Второе подмножество $GF(p^{\nu})$, определяемое произведением $r = n - k$ контрольных оснований

$$P_{конт}(z) = \prod_{i=k+1}^{k+r} p_i(z), \tag{4}$$

задает совокупность запрещенных комбинаций. Если $A(z)$ является элементом второго подмножества, то считается, что данная комбинация содержит ошибку. Таким образом, местоположение полинома $A(z)$ относительно двух данных подмножеств позволяет однозначно определить, является ли комбинация $A(z) = (\alpha_1(z), \ \ldots, \ \alpha_n(z))$ разрешенной, или содержит ошибочные символы.

Говоря о декодировании кодов, базирующихся на модулярном представлении, в первую очередь необходимо отметить, что данная операция относится к разряду немодульных и поэтому ее выполнение невозможно без использования тех или иных позиционных характеристик [4, 5]. Анализ известных методов контроля и коррекции ошибки в модульных избыточных кодах довольно часто производится с помощью процедуры перевода чисел из непозиционного кода в обобщенную полиадическую систему счисления [6, 7]. Данные методы, основанные на вычисление коэффициентов промежуточной полиадической системы $\left[a_1(z), \ a_2(z), \ldots, \ a_n(z)\right]$, в котором полином $A(z)$ изображается в виде

$$A(z) = a_1(z) + a_2(z)\, p_1(z) + \ldots + a_n(z)\, p_1(z)\, p_2(z) \ldots p_{k+r-1}(z). \qquad (5)$$

Если $p_1(z), \ p_2(z), \ldots, \ p_{k+r}(z)$, служат одновременно основаниями модульной системы и ОПС, тогда интервалы изменения цифр разрядов с одинаковыми номерами совпадут. Следовательно, если обеспечить соответствие между основаниями ОПС и основаниями ПСКВ, то справедливо равенство

$$A = (\alpha_1(z), \alpha_2(z), \ldots, \alpha_{k+r}(z)) = [a_1(z), a_2(z), \ldots, a_{k+r}(z)]. \qquad (6)$$

Исходя из условия (3), выражение (6) можно представить в виде

$$A(z) = a_1(z) + \ldots + a_k(z)\, P_{\text{заб}}(z) + \ldots + a_n(z)\, P_{\text{раб}}(z)\, p_{k+1}(z) \ldots p_{k+r-1}(z). \quad (7)$$

Тогда на основании (7) можно сделать вывод о возможности применения коэффициентов ОПС для процедур поиска и локализации ошибки. Данный вывод основывается на том, что, начиная с $(k + 1)$-го коэффициента ОПС, в слагаемых равенства (7) в качестве сомножителя используется $P_{\text{раб}}(z)$. Таким образом, если полином $A(z)$ принадлежит рабочему диапазону $P_{\text{раб}}(z)$, то старшие коэффициенты ОПС, соответствующие контрольным основаниям должны равняться нулю, т.е.

$$a_{k+1}(z) = 0, a_{k+2}(z) = 0, \ldots, \ a_{k+r}(z) = 0. \qquad (8)$$

В противном случае полином $A(z)$ содержит ошибку и находится вне рабочего диапазона системы ПСКВ.

В [8] довольно подробно рассмотрены основные математические модели вычисления коэффициентов обобщенной полиадической системы в полях Галуа. На основании проведенного анализа данных моделей было установлено, что наиболее предпочтительной с точки зрения аппаратурных и временных затрат является математическая модель перевода из ПСКВ в ОПС, представленная в [7]. Особенность данного алгоритма состоит в том, что наиболее трудоемкий этап перевода остаток - коэффициенты ОПС осуществляется путем параллельно-конвейерного вычисления коэффициентов. Существование данного метода обеспечивается в условиях выполнения китайской теоремы об остатках (КТО), согласно которой

$$A = \alpha_1(z)\, B_1(z) + \ldots + \alpha_{k+r}(z)\, B_{k+r}(z) = \sum_{i=1}^{k+r} \alpha_i B_i \bmod P_{\text{полн}}(z), \qquad (9)$$

где $B_i(z)$ – ортогональный базис i-го основания.

Представив ортогональные базисы в виде коэффициентов ОПС, получим

$$A = \alpha_1(z)\left[\gamma_1^1, \gamma_2^1, \ldots, \gamma_{k+r}^1\right] + \ldots + \alpha_{k+r}(z)\left[0, \quad 0, \ldots, \quad \gamma_{k+r}^{k+r}\right], \qquad (10)$$

где γ_i^j – коэффициенты ОПС j-го ортогонального базиса. Тогда, проведя умножение вычетов α_i на соответствующие коэффициенты ОПС помодульно и поразрядно, при этом, учитывая превышение модуля $p_i(z)$ как перенос единицы при суммировании результата, коэффициенты ОПС могут быть найдены непосредственно из выражения

$$a_i(z) = \left| \left| \sum_{j=1}^{i} \left| \alpha_j(z)\gamma^j \right|^{+}_{p_i(z)} \right|^{+}_{p_i(z)} + \delta_{i-1}(z) \right|^{+}_{p_i(z)}, \qquad (11)$$

где $\delta_{i-1}(z)$ – переполнение, полученное при суммировании по модулю $p_{i-1}(z)$.

Одним из важнейших свойств кодов ПСКВ, определенных в расширенных полях Галуа $GF(p^{\nu})$, является отсутствие межразрядных переносов при вычислении результата по модулю $p_i(z)$. Это позволяет свести операцию итеративного получения коэффициентов обобщенной полиадической системы к однотактовой процедуре, определяемой выражением

$$a_i(z) = \left| \left| \sum_{j=1}^{i} \alpha_j(z)\, \gamma^j(z) \right|^{+}_{p_i(z)} \right|^{+}_{p_i(z)}, \qquad (12)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ – количество оснований кода ПСКВ. При этом значение $\left|\gamma^j(z)\right|^{+}_{p_i(z)}$ заранее учитывает количество превышение модуля $p_i(z)$ как перенос единицы при суммировании результата. В табл. 1 представлена зависимость значений коэффициентов ОПС от местоположения и глубины ошибки для поля $GF(2^4)$, в котором в качестве рабочих оснований использованы $p_1(z) = z + 1$, $p_2(z) = z^2 + z + 1$, $p_3(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, а в качестве контрольных – $p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$, $p_5(z) = z^4 + z + 1$.

Анализ табл. 1 показывает, что применение двух контрольных оснований позволяет однозначно определить местоположение и глубину однократной ошибки, вызванную отказом вычислительного тракта $p_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$. И в этом случае данная модель контроля и коррекции ошибки весьма эффективна. Однако с ростом кратности ошибок избыточность вычислительной системы резко возрастает, вследствие чего уже при кратности ошибки равной двум (отказы по двум разным основаниям) применение коэффициентов ОПС может оказаться нецелесообразным.

Таблица 1

Зависимость значений коэффициентов ОПС от местоположения и глубины ошибки для поля GF(2^4)

Величина ошибки	Коэффициенты ОПС	
	$a_4(z)$	$a_5(z)$
$\Delta\alpha_1 = 1$	z^3	$z^3 + z^2 + z$
$\Delta\alpha_2 = 1$	$z^3 + z + 1$	$z^3 + z^2$
$\Delta\alpha_2 = z$	$z^3 + z^2 + z$	$z^3 + z$
$\Delta\alpha_3 = 1$	$z^2 + 1$	$z^3 + z^2 + z$
$\Delta\alpha_3 = z$	$z^3 + z$	$z^3 + z^2 + z + 1$
$\Delta\alpha_3 = z^2$	$z^3 + z^2$	$z^3 + z^2$
$\Delta\alpha_3 = z^3$	1	$z^3 + z$
$\Delta\alpha_4 = 1$	$z^2 + z$	$z^3 + z^2 + z$
$\Delta\alpha_4 = z$	$z^3 + z^2$	$z^3 + z^2 + z + 1$
$\Delta\alpha_4 = z^2$	1	$z^3 + z^2$
$\Delta\alpha_4 = z^3$	z	$z^3 + z + 1$
$\Delta\alpha_5 = 1$	0	z
$\Delta\alpha_5 = z$	0	z^2
$\Delta\alpha_5 = z^2$	0	z^3
$\Delta\alpha_5 = z^3$	0	$z + 1$

Для решения данной проблемы необходимо производить процедуру пересчета значений коэффициентов ОПС для каждого состояния спецпроцессора при его постепенной деградации, вызванной отказами вычислительных трактов $p_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$.

Представим ортогональные базисы $B_i(z)$, i = 1, 2, …, n, в обобщенной полиадической системе. Для их перевода в смешанную систему оснований воспользуемся итерационным методом, алгоритм которого представлен в [6]. Осуществим вычисление коэффициентов ОПС для $B_1(z)$. Очевидно, что $B_1(z) \equiv \alpha_1(z) \bmod p_1(z)$. Значит $a_1^1(z) = 1$.

Если от исходного значения $B_1(z)$ отнять значение остатка $\alpha_1(z)$, то полученный результат будет без остатка делиться на $p_1(z)$, т.е.

$$B_1^1(z) = \frac{B_1(z) - \alpha_1(z)}{p_1(z)} < p_2(z)\, p_3(z) \ldots . p_n(z),$$

следовательно, оно определяется своими последними цифрами. Тогда

$$B_1^1(z)=\frac{(1,0,0,\ldots,0)-(1,1,1,\ldots,1)}{p_1(z)}=\left(\alpha_2^1(z),\ \alpha_3^1(z),\ldots,\alpha_n^1(z)\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{p_1(z)}\bmod p_2(z),\ \frac{1}{p_1(z)}\bmod p_3(z),\ldots,\ \frac{1}{p_1(z)}\bmod p_n(z)\right). \quad (13)$$

Но значение $\frac{1}{p_1(z)}\bmod p_j(z)=m_j^1(z)$ – обратная величина основания $p_1(z)$, по модулю $p_j(z)$, $j=2,\ldots,$ n. Тогда (13) можно записать в виде

$$B_1^1(z)=\left(m_2^1(z),\ m_3^1(z),\ldots,m_n^1(z)\right). \quad (14)$$

Следовательно, вторая цифра $a_2^1(z)=m_2^1(z)$.

Аналогично предыдущим вычислениям определяем значение

$$B_1^2(z)=\frac{B_1^1(z)-m_2^1(z)}{p_2(z)}=\left(\alpha_3^2(z),\ldots,\alpha_n^2(z)\right)=$$
$$=\left(\frac{m_3^1(z)-m_2^1(z)}{p_2(z)}\bmod p_3(z),\ldots,\ \frac{m_n^1(z)-m_2^1(z)}{p_2(z)}\bmod p_n(z)\right). \quad (15)$$

Преобразуем выражение (15) к виду

$$B_1^2(z)=\left(\left|\left(m_3^1(z)-m_2^1(z)\right)m_3^2(z)\right|^+_{P_3(z)},\ \ldots,\ \left|\left(m_n^1(z)-m_2^1(z)\right)m_n^2(z)\right|^+_{P_n(z)}\right). \quad (16)$$

Значит третий коэффициент ОПС $a_3^1(z)=\left|\left(m_3^1(z)-m_2^1(z)\right)m_3^2(z)\right|^+_{P_3(z)}$.

Но значение $a_2^1(z)=m_2^1(z)$. Тогда

$$a_3^1(z)=\left|\left(m_3^1(z)-a_2^1(z)\right)m_3^2(z)\right|^+_{P_3(z)}. \quad (17)$$

Для j-го коэффициента ОПС имеем

$$B_1^{j-1}(z)=\frac{B_1^{j-2}(z)-a_j^1(z)}{p_j(z)}=\left(\alpha_j^{j-1}(z),\ldots,\alpha_n^{j-1}(z)\right),$$
$$a_j^1(z)=\alpha_j^{j-1}(z)=\left(\left(\left(\left(m_j^1(z)+a_2^1(z)\right)m_j^2(z)+\ldots+a_j^{j-1}(z)\right)m_j^{j-1}(z)\right)\bmod p_j(z)\right).$$

Наконец для последнего коэффициента ОПС получаем

$$B_1^{n-1}(z)=\frac{B_1^{n-2}(z)-a_j^{n-1}(z)}{p_j(z)}=\alpha_n^{n-1}(z).$$
$$a_n^1(z)=\alpha_n^{n-1}(z)=\left(\left(\left(\left(m_n^1(z)+a_2^1(z)\right)m_n^2(z)+\ldots+a_n^{n-1}(z)\right)m_n^{n-1}(z)\right)\bmod p_n(z)\right).$$

Таким образом, осуществлен перевод первого ортогонального базиса $B_1(z)$ в смешанную систему оснований. Тогда в виде коэффициентов ОПС ортогональный базис представляется как

$$B_1(z) = \left[a_1^1(z), a_2^1(z), \ldots, a_n^1(z)\right].$$

Рассмотрим процедуру перевода второго ортогонального базиса $B_2(z)$ в обобщенную полиадическую систему. Воспользуемся рассмотренным выше алгоритмом. Так как $B_2(z) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, то значение $a_1^2(z) = \alpha_1^1(z) = 0$. Определим значение второго коэффициента ОПС. Для этого вычислим

$$B_2^1(z) = \frac{(0,1,0,\ldots,0) - (0,0,0,\ldots,0)}{p_1(z)} = \left(\alpha_2^2(z), 0, \ldots, 0\right) = \left(\frac{1}{p_1(z)} \bmod p_2(z), 0, \ldots, 0\right). \quad (18)$$

Преобразуя последнее равенство, получаем $B_2^1(z) = \left(m_2^1(z), 0, \ldots, 0\right)$.

Тогда $a_2^2(z) = m_2^1(z)$.

Определим величину третьего коэффициента ОПС.

$$B_2^2(z) = \frac{B_2^1(z) - a_2^2(z)}{p_2(z)} = \left(\alpha_3^2(z), \ldots, \alpha_n^2(z)\right) = \left(\left|\frac{m_2^1(z)}{p_2(z)}\right|^+_{p_3(z)}, \ldots, \left|\frac{m_2^1(z)}{p_2(z)}\right|^+_{p_n(z)}\right) =$$

$$= \left(\left(m_2^1(z) m_3^2(z)\right) \bmod p_3(z), \ldots, \left(m_2^1(z) m_n^2(z)\right) \bmod p_n(z)\right).$$

Тогда

$$a_3^2(z) = \alpha_3^2(z) = \left(m_2^1(z) m_3^2(z)\right) \bmod p_3(z) = \left(a_2^2(z) m_3^2(z)\right) \bmod p_3(z). \quad (19)$$

Используя представленный выше алгоритм, получаем величину j-го коэффициента ОПС:

$$B_2^{j-1}(z) = \frac{B_2^{j-2}(z) - a_j^2(z)}{p_j(z)} = \left(\alpha_j^{j-1}(z), \ldots, \alpha_n^{j-1}(z)\right);$$

$$a_j^2(z) = \alpha_j^{j-1}(z) = \left(\left(\left(a_2^2(z) m_j^2(z) + a_3^2(z)\right) m_j^3 + \ldots + a_{j-1}^2(z)\right) m_j^{j-1}(z)\right) \bmod p_j(z).$$

Для последнего коэффициента второго ортогонального базиса получаем

$$B_2^{n-1}(z) = \frac{B_2^{n-2}(z) - a_{n-1}^2(z)}{p_j(z)} = \alpha_n^{n-1}(z);$$

$$a_n^2(z) = \alpha_j^{j-1}(z) = \left(\left(\left(a_2^2(z) m_n^2(z) + a_3^2(z)\right) m_n^3 + \ldots + a_{n-1}^2(z)\right) m_n^{n-1}(z)\right) \bmod p_n(z).$$

Тогда в виде коэффициентов ОПС второй ортогональный базис представляется как $B_2(z) = \left[0, a_2^2(z), \ldots, a_n^2(z)\right]$.

Обобщим рассмотренный алгоритм для представления последнего n-го ортогонального базиса, который представляется как $B_n(z)=(0, 0, \ldots, 1)$. Тогда

$$a_1^n(z)=0; \quad a_2^n(z)=0; \quad \ldots; \quad a_{n-1}^n(z)=0; \quad a_n^n(z)=\prod_{j=1}^{n-1} m_n^j(z) \bmod p_n(z).$$

В этом случае $B_n(z)=\left|\, 0; 0; \ldots; a_n^n(z)=\prod_{j=1}^{n-1} m_n^j(z) \bmod p_n(z) \right|$.

Если положить, что $a_1^1(z)=m_1^0(z)=1$, то значения коэффициентов ОПС для i-го ортогонального базиса ПСКВ определяется выражением

$$a_j^i(z)=\begin{cases} 0, & \text{если } j<i; \\ \prod_{l=1}^{i-1} m_j^l(z) \bmod p_j(z), & \text{если } j=i; \\ \left(\left(\left(a_i^i m_j^i(z)+a_{i+1}^i\right) m_j^{i+1}(z)+\ldots+a_{j-1}^i\right) m_j^{j-1}(z)\right) \bmod p_j(z), & \text{если } j>i. \end{cases} \quad (20)$$

Анализ выражения (20) показывает, что данная процедура описывается формулой Горнера и может быть успешна реализована на основе применения параллельно-конвейерной организации вычислений. Таким образом, очевидно, что коэффициенты ОПС являются идеальной основной для построения вычислительных устройств, осуществляющих перевод из кода ПСКВ в позиционный код с одновременным поиском и локализацией ошибочных разрядов. Особенно это наглядно проявляется в живучих системах, которые способны сохранять работоспособность за счет отключения отказавших вычислительных каналов и реконфигурации структуры СП.

Следует отметить, что данная реализация производится по правилам модулярной арифметики и носит последовательный итерационный характер, когда значения последующих коэффициентов определяются величинами предыдущих коэффициентов. Таким образом, из равенства (20) наглядно видно, что отключение старшего n-го основания ПСКВ при его выходе из строя не влечет за собой изменение значений предыдущих коэффициентов ОПС $a_j^i(z);\ i, j=1, 2, \ldots, n-1$. При этом значения $a_n^i(z);\ i=1, 2, \ldots, n$, просто отбрасываются.

Совсем иная картина наблюдается при выходе их строя любого другого основания. Как следует из выражения (20) выход из строя j-го основания влечет за собой удаление $a_j(z)$ составляющих ортогональных базисов. А для компенсации величины $m_j^i(z)$ необходимо произвести умножение коэффициентов ОПС по модульно на обратный ей элемент

$m_j^i(z)^{-1} \bmod p_l(z)$, где $l=1, 2, \dots, n$; $l \neq j$.

Таким образом, определяется процедура пересчета коэффициентов ОПС для живучих вычислительных систем ПСКВ с реконфигурируемой структурой. Реализация алгоритма пересчета коэффициентов ОПС осуществляется следующей последовательностью шагов [9]:

1. С помощью коэффициентов ОПС осуществляется контроль процесса функционирования спецпроцессора ПСКВ.

2. При обнаружении запрещенной комбинации производится локализация ошибки и осуществляется отключение отказавшего j-го канала.

3. Если $j = n$, то значения коэффициентов ОПС не пересчитываются, а производится отключение вычислительного тракта соответствующего данному основанию. Затем осуществляется переход к пункту 1.

4. Если $j \neq n$, то производится отключение отказавшего канала с последующим пересчетом величин $a_l^i(z), l \neq j; i \neq j; j < l \leq n$ путем умножения на величину $m_j^i(z)^{-1} \bmod p_l(z)$. Затем осуществляется переход к пункту 1.

Рассмотрим пример. Пусть задано поле $GF(2^4)$, в котором в качестве рабочих оснований используются многочлены $p_1(z)=z+1$, $p_2(z)=z^2+z+1$, $p_3(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$, а в качестве контрольных оснований выбраны – $p_4(z)=z^4+z^3+1$, $p_5(z)=z^4+z+1$.

Для данной системы определены следующие ортогональные базисы:

$$B_1(z)=z^{14}+z^{13}+z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1;$$

$$B_2(z)=z^{14}+z^{13}+z^{11}+z^{10}+z^8+z^7+z^5+z^4+z^2+z;$$

$$B_1(z)=z^{14}+z^{13}+z^{12}+z^{11}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^4+z^3+z^2+z;$$

$$B_4(z)=z^{14}+z^{13}+z^{12}+z^{11}+z^9+z^7+z^6+z^3;$$

$$B_5(z)=z^{12}+z^9+z^8+z^6+z^4+z^3+z^2+z.$$

Воспользуемся выражение (20) и представим данные ортогональные базисы в виде системе со смешанными основаниями. Тогда:

$$B_1=[1 \quad z \quad z^3+z \quad z^3 \quad z^3+z^2+z];$$

$$B_2=[0 \quad z \quad z^3+z^2+1 \quad z^3+z+1 \quad z^3+z^2];$$

$$B_3=[0 \quad 0 \quad z^2+z+1 \quad z^2+1 \quad z^3+z^2+z];$$

$$B_4=[0 \quad 0 \quad 0 \quad z^2+z \quad z^3+z^2+z];$$

$$B_5=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad z].$$

Допустим, что в процессе функционирования спецпроцессора отказало старшее основание $p_5(z) = z^4 + z + 1$. Тогда деградируемая система будет определяться модулями $p_1(z)$, $p_2(z)$, $p_3(z)$, $p_4(z)$, ортогональные базисы которых равны соответственно:

$$B_1^{1234}(z) = z^{10} + z^9 + z^8 + z^6 + z^5 + z^2 + 1;$$

$$B_2^{1234}(z) = z^{10} + z^9 + z^6 + z^5 + z^4 + z;$$

$$B_3^{1234}(z) = z^9 + z^8 + z^6 + z^2;$$

$$B_4^{1234}(z) = z^9 + z^6 + z^4 + z.$$

Воспользуемся выражение (20) для представления полученных ортогональных базисов в полиадической системе. Получаем:

$$B_1^{1234}(z) = [1 \quad z \quad z^3 + z \quad z^3];$$

$$B_2^{1234}(z) = [0 \quad z \quad z^3 + z^2 + 1 \quad z^3 + z + 1];$$

$$B_1^{1234}(z) = [0 \quad 0 \quad z^2 + z + 1 \quad z^2 + 1];$$

$$B_1^{1234}(z) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad z^2 + z].$$

Пусть в процессе функционирования отказало $p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$. Тогда деградируемая система будет определяться модулями $p_1(z)$, $p_2(z)$, $p_3(z)$, ортогональные базисы которых равны:

$$B_1^{123}(z) = z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1;$$

$$B_2^{123}(z) = z^6 + z^5 + z + 1;$$

$$B_3^{123}(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

Представим данные ортогональные базисы в ОПС. Получаем:

$$B_1^{123}(z) = [1 \quad z \quad z^3 + z];$$

$$B_2^{123}(z) = [0 \quad z \quad z^3 + z^2 + 1];$$

$$B_1^{123}(z) = [0 \quad 0 \quad z^2 + z + 1.$$

Если просуммировать ортогональные базисы, то в результате получается единица. Аналогичный результат получается, если выполнить данные действия над коэффициентами ОПС данных базисов. Совпадение свидетельствует о правильности процесса пересчета коэффициентов ОПС при деградации структуры СП, функционирующего в ПСКВ.

Рассмотрим случай, когда из строя вышел первый вычислительный канал, соответствующий $p_1(z) = z + 1$.

Тогда вычислительная система будет определяться модулями $p_2(z)$, $p_3(z)$, $p_4(z)$, $p_5(z)$, ортогональные базисы которых равны

$$B_2^{2345}(z) = z^{12} + z^9 + z^6 + z^3 + 1;$$
$$B_3^{2345}(z) = z^{10} + z^5 + 1;$$
$$B_4^{2345}(z) = z^{10} + z^8 + z^5 + +z^4 + z^2 + z + 1;$$
$$B_5^{2345}(z) = z^{12} + z^9 + z^8 + z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + z.$$

Воспользуемся выражение (6) и представим данные базисы в смешанной системе оснований. Получаем:

$$B_2^{2345}(z) = [1 \quad z^3 + 1 \quad z^2 + 1 \quad z^2 + z];$$
$$B_3^{2345}(z) = [0 \quad z^3 + 1 \quad z^3 + z^2 + z + 1 \quad 1];$$
$$B_4^{2345}(z) = [0 \quad 0 \quad z^3 + z \quad 1];$$
$$B_5^{2345}(z) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad z^2 + z].$$

Осуществим процедуру пересчета коэффициентов ОПС из исходного множества $\{a_1(z),\ a_2(z),\ a_3(z),\ a_4(z),\ a_5(z)\}$, определяемого полной системой оснований, к усеченному множеству

$$\left\{a_2^{2345}(z), \quad a_3^{2345}(z), \quad a_4^{2345}(z), \quad a_5^{2345}(z)\right\}.$$

Рассмотрим ортогональный базис $B_2(z)$. Воспользуемся алгоритмом пересчета, приведенным в работе [9]. Следует отметить, что при выполнении операций умножений на величину $\dfrac{1}{m_l^i(z)} \bmod p_l(z)$, где l=2, 3, 4, 5, и вычислений новых значений коэффициентов ОПС необходимо учитывать количество переходов через модуль $p_l(z)$. Тогда

$$a_2^{2345}(z) = (z+1)z \bmod p_1(z) = 1 .$$

При этом количество переходов за модуль $p_2(z)$ равно единице. Данное значение необходимо прибавить к последующему значению коэффициента ОПС.

Определяем следующий коэффициент ОПС с учетом переполнения

$$a_3^{2345}(z) = ((z+1)(z^3 + z^2 + 1) + 1) \bmod p_3(z) = z^3 + 1 .$$

При этом количество переходов по модулю $p_3(z)$ равно единице. Тогда значение четвертого коэффициента с учетом перехода будет равно

$$a_4^{2345}(z) = ((z+1)z^3 + 1) \bmod p_4(z) = z^2 + 1 .$$

Количество переходов за пределы модуля $p_4(z)$ равно единице. Определяем значение пятого коэффициента с учетом переполнения

$$a_5^{2345}(z) = ((z+1)(z^3 + z^2 + z) + 1) \bmod p_5(z) = z^2 + z .$$

Аналогичным образом определяет коэффициент ОПС для ортогонального базиса $B_2(z)$. Имеем:

$$a_3^{2345}(z) = ((z+1)(z^2+z+1) \bmod p_3(z) = z^3+1;$$

$$a_4^{2345}(z) = ((z+1)(z^2+1) \bmod p_4(z) = z^3+z^2+z+1;$$

$$a_5^{2345}(z) = ((z+1)(z^3+z^2+z) \bmod p_5(z) = 1.$$

Произведем пересчет коэффициентов ОПС для ортогонального базиса $B_4(z)$. Получаем следующие значения:

$$a_4^{2345}(z) = ((z+1)(z^2+z) \bmod p_4(z) = z^3+z;$$

$$a_5^{2345}(z) = ((z+1)(z^3+z^2+z) \bmod p_5(z) = 1.$$

Осуществим пересчет для последнего ортогонального базиса $B_5(z)$. Тогда

$$a_5^{2345}(z) = ((z+1)z) \bmod p_5(z) = z^2+z.$$

Представленные пересчетные данные полностью совпадают с контрольными просчетами. Полученные данные свидетельствуют о высокой эффективности разработанного алгоритма пересчета коэффициентов ОПС для непозиционных вычислительных систем с реконфигурируемой структурой.

Кроме того, предложенная математическая модель позволяет эффективно определять местоположение и глубину ошибки для спецпроцессора класса вычетов. Значения старших коэффициентов ОПС, которые соответствуют контрольным основаниям, позволяют определить номер интервала $l_{инт}$, в который попадает полином A(z) при возникновении ошибки из-за отказа основания ПСКВ. При принятии допущений о простейшем потоке отказов элементов вычислительных трактов необходимым и достаточным условием обнаружения местоположения и глубины однократной ошибки является наличие двух избыточных оснований $p_{(k+1)^*}(z)$, $p_{(k+2)^*}(z)$ из множества оставшихся работоспособных каналов. Тогда интервал определяется как

$$l_{инт}(z) = a_{(k+1)^*}(z) + a_{(k+2)^*}(z)\, p_{(k+1)^*}(z)\,. \qquad (21)$$

В то же самое время при проведении исследований было установлено, что величина $l_{инт}$ в который попадет полином A(z) при возникновении ошибки по j-му основанию определяется согласно выражения

$$l_{\text{инт}}^{j}(z)=\left.\left|\left(\Delta\alpha_j(z)\prod_{\substack{i\in S_1\\ i\neq j}}^{k+r} m_j^i(z)\right)\bmod p_j(z)\frac{1}{p_j(z)}\right|^{+}_{P_{S2}(z)},\qquad (22)$$

где
$$P_{S_2}(z)=\prod_{y\in S_2} p_y(z);$$

$\Delta\alpha_j(z)$ – глубина ошибки; $m_j^i(z)=p_i(z)^{-1}\bmod p_j(z)$ – постоянная величина, определяемая основаниями $p_i(z)$ и $p_j(z)$ ПСКВ; $i,\ j=1,\ 2,\dots,k+r$; S_1 – множество работоспособных информационных каналов; S_2 – множество работоспособных контрольных каналов.

Следовательно, процесс обнаружения ошибки и ее величины может быть проведен в декодирующем устройстве на основе модульных операций с использованием величин $m_j^i(z)$. При этом для определения местоположения и глубины ошибки в кодовой конструкции достаточно сохранять в памяти значения $m_j^i(z)$, а затем, подставив их в выражение (22) и вычислив (21), обеспечить их равенство. Полученное при этом значение $\Delta\alpha_j(z)$ позволит однозначно определить местоположение и глубину ошибки.

Таким образом, данная математическая модель может служить идеальной основой для построения живучих непозиционных СП ПСКВ с реконфигурируемой структурой. Проведенные исследования показали высокую эффективность работы данной модели. Благодаря пересчету коэффициентов ОПС обеспечивалось функционирование непозиционной вычислительной системы при деградации ее структуры, вызванной отказами вычислительных трактов. Так спецпроцессор ПСКВ, функционирующий в поле $GF(2^5)$, сохранял работоспособное состояние при отказе трех вычислительных трактов, используя при этом только два контрольных основания, за счет снижения в допустимых пределах точности и производительности вычислений. Хотя согласно классической теории кодирования для коррекции трехкратных ошибок непозиционный СП должен был содержать четыре контрольных основания [6]. Таким образом, полученные результаты имеют важное практическое значение, так как позволяют строить отказоустойчивые вычислительные устройства цифровой обработки сигналов, функционирующие в полиномиальных кодах.

Выводы. Показано, что коды полиномиальной системы класса вычетов, обладая модульной структурой, характеризуются высокими потенциальными возможностями по приданию СП ПСКВ свойств живучести. Благодаря реконфигурации структуры вычислительная система ПСКВ сохраняет работоспособное состояние при отказе оснований за счет снижения в допустимых пределах основных показателей качества функционирования. Проведенные исследования обосновали возможность применения математической модели пересчета коэффициентов ОПС для СП с постепенно деградируемой структурой. Показано, что применение разработанной математической модели позволяет эффективно реализовать процедуры обнаружения и коррекции ошибок, а так же осуществлять перевод из непозиционного кода в ПСС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Червяков Н.И., Калмыков И.А., Щелкунова Ю.О., Бережной В.В. Математическая модель нейронных сетей для исследования ортогональных преобразований сигналов в расширенных полях Галуа // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2003. – № 6. – С. 61 – 68.*
2. *Червяков Н.И., Калмыков И.А., Щелкунова Ю.О., Бережной В.В. Математическая модель нейронной сети для коррекции ошибок в непозиционном коде расширенного поля Галуа // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2003. – № 8 – 9. – С. 10 – 16.*
3. *Калмыков И.А., Щелкунова Ю.О., Гахов В.Р. Применение ПСКВ для повышения отказоустойчивости биометрических систем аутентификации // Известия ТРТУ. Тематический выпуск. Материалы V Международной научно-практической конференции «Информационная безопасность». – Таганрог: ТРТУ, 2003. – № 4. – С. 151 – 155.*
4. *Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Сов. радио, 1968. – 440 с.*
5. *Червяков Н.И., Бережной В.В., Гончарова Е.Н., Калмыков И.А. Локализация и исправление арифметических ошибок в модулярных нейрокомпьютерах // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2003. – № 7. – С. 28 – 32.*
6. *Червяков Н.И., Сахнюк П.А., Шапошников А.В., Ряднов С.А. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем. – М.: Физматлит, 2003. – 303 с.*
7. *Калмыков И.А., Щелкунова Ю.О. Математическая модель вычисления коэффициентов обобщенной полиадической системы $GF(p^v)$ на основе нейронной сети // Тезисы докладов и сообщений II Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов». – Самара. – 2003. – С. 146.*
8. *Элементы компьютерной математики и нейроноинфроматики / Н.И. Червяков, И.А. Калмыков, В.А. Галкина, Ю.О. Щелкунова, А.А. Шилов; Под ред. Н.И. Червякова. – М.: Физматлит, 2003. – 216 с.*
9. *Калмыков И.А., Чипига А.А. Методика пересчета коэффициентов обобщенной полиадической системы для живучих систем биометрической*

аутентификации пользователя // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Информационная безопасность». – Таганрог: ТРТУ, 2004. – С. 144 – 146.

Поступила 25.08.2004

КАЛМЫКОВ Игорь Анатольевич*, кандидат технических наук, доцент, зам. нач. кафедры информатики и информационных технологий в системах управления филиала Ростовского военного института РВ (г. Ставрополь). Область научных интересов – нейронные сети, системы остаточных классов, параллельные вычисления в полях Галуа.*