УДК 623.021:005

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ СИЛ И СРЕДСТВ ОПЕРИРУЮЩИХ СТОРОН ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СИЛ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩЕЙ СТОРОНЫ В УСЛОВИЯХ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил д.т.н., проф. Б.Ф. Самойленко)

Рассматривается алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного матожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Постановка задачи. При решении задач планирования в конфликтных ситуациях необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом от поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника. Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств, а также управление распределением сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 6]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и определены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решения задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В

[5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. В [6] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны при постоянных параметрах распределения. Однако в этих работах не рассматривалось алгоритм оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Цель статьи – разработка алгоритма оптимального распределения разнородных сил и средств сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Основной материал. Рассмотренные в [1 – 5] математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующей стороны, реализующие критерии: *минимума среднего* суммарного количества основных сил противника в конце конфликтной ситуации; *максимума среднего* суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации; *минимума среднего* суммарного количества основных сил противника за весь период конфликтной ситуации; *максимума среднего* суммарного количества основных сил противника за весь период конфликтной ситуации, – не учитывают относительную важность разнородных сил и средств противника.

Существенным обобщением рассмотренных задач является задача оптимального распределения разнородных сил и средств стороны А, в которой эта сторона стремится выбрать свои управляющие параметры α таким образом, чтобы к концу боя средневзвешенное количество основных сил стороны В было минимальным при известной стратегии распределения сил и средств стороны В. Математическая модель данной задачи имеет вид [6]:

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} w_j y_j(T); \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} = 1, \quad \alpha_{ji} \geq 0; \quad \beta_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $x_i(t)$, $y_i(t)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон A и B, сохранившихся к моменту времени t; $x_i(T)$, $y_i(T)$ – математические ожидания количества боевых средств сторон A и B, сохранившихся к моменту времени T; n_1, m_1 – количество типов основных средств сторон B и A соответственно; m, n – количество типов сил и средств сторон A и B соответственно; t – текущее время конфликтной ситуации; T – заданное время конфликтной ситуации; $w_j\left(j = \overline{1, n_1}\right)$ – коэффициент важности основного средства j-го типа стороны B; $\beta_{ij}\left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\right)$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны B; $\alpha_{ij}\left(j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}; 0 \leq t \leq T\right)$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны A по силам и средствам стороны B; $x_i^0, y_j^0\left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\right)$ – количество сил и средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B в начале конфликтной ситуации; a_{ij}, $b_{ij}\left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\right)$ – эффективные скорострельности средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B соответственно.

Задача (1 – 3) представляет собой задачу оптимального управления с терминальным функционалом, закреплённым временем и свободным правым концом. Как было отмечено в [6], применение принципа максимума Понтрягина для решения этой задачи не представляется возможным. Обоснуем целесообразность использования и предложим соответствующую реализацию метода условного градиента, который применяется для численного решения задачи оптимизации непрерывно дифференцируемого функционала F(u) на выпуклом ограниченном множестве U гильбертова пространства H:

$$F(u) \underset{u \in U}{\to} \min, \tag{4}$$

В соответствии с методом условного градиента для поиска $u_k \in U$ решения задачи (4) найдем вспомогательное приближение $\bar{u}^k \in U$ как решение экстремальной задачи

$$\left\langle F'\left(u^k\right), \bar{u}^{\,k} \right\rangle = \min_{u \in U} \left\langle F'\left(u^k\right), u \right\rangle, \qquad (5)$$

где $F'\left(u^k\right)$ – градиент функционала $F(u)$ в точке u^k.

Следующее приближение решения задачи (4) находят по формуле

$$u^{k+1} = u^k + \rho_k \left(\bar{u}^{\,k} - u^k\right), \quad 0 \le \rho_k \le 1, \qquad (6)$$

где ρ_k – шаг поиска.

Если градиент $F'(u)$ выпуклого функционала удовлетворяет условию Липшица на множестве U с константой $L \ge 0$:

$$\left\| F'(u) - F'(v) \right\| \le L \left\| u - v \right\|, \ \forall u, v \in U,$$

то последовательность (6) минимизирует этот функционал на U и слабо сходится к множеству оптимальных точек U^*:

$$\lim_{k \to \infty} F\left(u^k\right) = F\left(u^*\right); \ u^* \in U^*.$$

Докажем следующую теорему, обосновывающую применение метода условного градиента.

Теорема 1. Последовательность (6) для задачи (1) – (3) минимизирует функционал $J(\alpha)$.

Доказательство. Функционал $J(\alpha)$ линеен в силу линейности по α правых частей системы (2) и, следовательно, выпукл. Множество D, определяемое соотношениями (3), замкнуто и ограничено в R^{mn}. Функционал $J(\alpha)$ непрерывен и дифференцируем по α, причём его градиент возможно представить в виде:

$$J'(\alpha) = -\nabla_\alpha H(x, y, \varphi, \eta, \alpha) = \nabla_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \Psi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right] \right\},$$

где $H(x, y, \varphi, \eta, \alpha)$ – функция Гамильтона – Понтрягина для задачи (1) – (3) [6].

Так как частные производные функции Гамильтона – Понтрягина по α_{ij} равны

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{ji}} = a_{ji} x_i(t) \eta_j(t); \ j = \overline{1, n}; \ i = \overline{1, m},$$

то

$$J'(\alpha) = \left\| a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right\|_{n, m}. \qquad (7)$$

Отсюда следует, что условие Липшица тривиально выполняется с константой $L = 0$. В связи с вышесказанным следует справедливость теоремы (1).

Опишем алгоритм решения задачи (1) – (3).

1. Определение вспомогательного приближения.

Вычислим

$$\min_{\alpha\in D}\left\langle J'\left(\alpha^k\right),\alpha\right\rangle=\min_{\alpha\in D}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)\alpha_{ji}\right]dt=\min_{\alpha\in D}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\left(\int_0^T a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)dt\right)\alpha_{ji}. \quad (8)$$

Интегралы в (8) можно вычислить приближённо по формуле прямоугольников

$$I_{ij}=\int_0^T a_{ji}x_i(t)\eta_j(t)dt\approx\frac{a_{ji}T}{N}\sum_{s=0}^{N-1}x_i(t_s)\eta_j(t_s),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}, \quad (9)$$

где N – количество промежутков разбиения отрезка $[0;T]$, $t_s=sT/N$, $s=\overline{0,N-1}$, а значение функций $x_i(t_s)$; $\eta_j(t_s)$; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$; $s=\overline{0,N-1}$ находятся в результате численного решения системы дифференциальных уравнений (2) и сопряжённой системы

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi_i(t)}{dt}=\sum\limits_{j=1}^n\alpha_{ji}a_{ji}\eta_j(t), & i=\overline{1,m};\\ \dfrac{d\eta_j(t)}{dt}=\sum\limits_{i=1}^m\beta_{ij}b_{ij}\ \varphi_i(t), & j=\overline{1,n}.\end{cases} \quad (10)$$

В (10) условия трансверсальности имеют вид:

$$\begin{cases}\varphi_i(T)=0, & i=\overline{1,m},\\ \eta_j(T)=-w_j, & j=\overline{1,n}.\end{cases} \quad (11)$$

Используя метод Рунге – Кутта 4-го порядка при $\alpha=\alpha^k$, получим:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=-\sum\limits_{j=1}^n\beta_{ij}b_{ij}y_j(t), & i=\overline{1,m};\\ \dfrac{dy_j}{dt}=-\sum\limits_{i=1}^m\alpha_{ji}^k a_{ji}x_i(t), & j=\overline{1,n};\end{cases} \quad (12)$$

$$x_i(0)=x_i^0,\quad i=\overline{1,m};\quad y_j(0)=y_j^0,\quad j=\overline{1,n};$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt}=\sum_{j=1}^n\alpha_{ji}^k a_{ji}\eta_j(t);\quad \frac{d\eta_j}{dt}=\sum_{i=1}^m\beta_{ij}b_{ij}\varphi_i(t);$$

$$\varphi_i(T)=0,\quad i=\overline{1,m};\quad \eta_j(T)=-w_j,\quad j=\overline{1,n}. \quad (13)$$

Так как для сопряжённой системы известны конечные условия, то её интегрирование проводится в обратном порядке от $t=T$ к $t=0$.

Минимум в (8) достигается при

$$\overline{\alpha_{ji}^{k}} = \begin{cases} 1, & j = j_k, \quad i = \overline{1, m}; \\ 0, & j \neq j_k, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\left(j_k, i\right) = \arg\min_{1 \le j \le n} \left[\int_0^T a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) dt \right]. \tag{15}$$

2. Определение шага поиска.

Следуя (6), приближение найдём в виде

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho_k \left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right), \quad 0 \le \rho_k \le 1. \tag{16}$$

где $\overline{\alpha}^k = \left\| \overline{\alpha}_{j,i}^k \right\|_{n,m}$.

Определим длину шага ρ_k как оптимальную, исходя из соотношения

$$\varphi(\rho_k) = \min_{0 \le \rho \le 1} \varphi(\rho) = \min_{0 \le \rho \le 1} J\left[\alpha^k + \rho\left(\overline{\alpha}^k - \alpha^k \right) \right]. \tag{17}$$

Зависимость $\varphi(\rho)$ достаточно просто аппроксимируется квадратной параболой по трём точкам: $(0; \varphi(0)), (0{,}5; \varphi(0{,}5)), (1; \varphi(1))$. Точка минимума в (15) аппроксимируется значением

$$\rho_k = 0{,}25 + \frac{0{,}25\left[\varphi(0) - \varphi(0{,}5)\right]}{0{,}5\,\varphi(0) - \varphi(0{,}5) + 0{,}5\,\varphi(1)}. \tag{18}$$

Использование аппроксимации $\varphi(\rho)$ с большим числом точек не является, как правило, оправданным.

3. Критерий оптимальности

Критерием останова алгоритма является выполнение неравенства.

$$\Delta_k = \left| J\left(\alpha^{k+1}\right) - J\left(\alpha^k\right) \right| \langle\, \varepsilon, \varepsilon \,\rangle\, 0;$$

или

$$\Delta_k = \left| \sum_{j=1}^{n} w_j \left[y_j^{k+1}(T) - y_j^k(T) \right] \right| \langle\, \varepsilon. \tag{19}$$

Таким образом, алгоритм оптимального распределения разнородных средств по рассматриваемому критерию построен.

Выводы. 1. В статье описан разработанный алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

2. Алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А можно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХВф «Транспорт України». – Вип. 1(11). – 2001. – С. 129 – 133.*
2. *Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002 – Вип. 2 (18). – С. 155 – 158.*
3. *Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5 (21). – С. 45 – 47.*
4. *Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6 (22). – С. 277 – 280.*
5. *Кононов В.Б. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 1 (17). – С. 59 – 62.*
6. *Кононов В.Б. Оптимальное управление распределением разнородных сил и средств сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны при постоянных параметрах распределения // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2004. – № 2 (6). – С. 128 – 131.*

Поступила 30.08.2004

***КОНОНОВ Владимир Борисович**, кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры ХУ ПС. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – исследование операций.*