УДК 629.396

МНК-ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЗАВИСИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПО КЛАССИФИЦИРОВАННОЙ ВЫБОРКЕ

О.Г. Симонова
(представил д.т.н., проф. Д.В. Голкин)

В статье разрабатывается процедура МНК-оценки параметров линейных траекторий с зависимыми параметрами и их корреляционные матрицы.

Введение. На практике имеют место случаи движения совокупности объектов по траекториям с зависимыми параметрами. Так, например, в модифицированной орбитальной системе координат [1] космические объекты, запущенные одной ракетой-носителем, по временной координате движутся по линейным траекториям с одинаковым начальным положением и различной скоростью [2]. Существуют случаи движения объектов с одинаковой скоростью и разным начальным положением.

Анализ последних достижений и публикаций. Впервые понятие зависимых траекторий было введено в работе [2], посвященной оценке параметров траекторий по смешанной выборке наблюдений. Процедура МНК-оценки параметров зависимых траекторий и соответствующая корреляционная матрица ошибок ранее не исследовались. Вместе с тем для зависимых линейных траекторий (с одинаковым начальным положением и различной скоростью или с одинаковой скоростью и различным начальным положением) нижней границей СКО оценок, полученных по смешанной выборке [2], может служить СКО МНК-оценок параметров зависимых линейных траекторий по классифицированной выборке измерений. Общая теория метода наименьших квадратов изложена, например, в [3]. Процедура МНК-оценки параметров линейных траекторий известна [4], при этом при равноточных (σ^2) и равнодискретных (T_0) измерениях СКО по начальному положению y_0 и скорости V объекта составляет $\frac{2(2N-1)}{N(N+1)}$ и $\frac{12}{N(N^2-1)T_0^2}$, соответственно, где N – количество измерений.

Постановка задачи. Рассматривается однокоординатный случай движения объекта по линейной траектории $y_i(\theta) = y_0 + V \cdot t_i$, где t_i – время; $\theta^T = \{y_0, V\}$ – вектор-столбец параметров траектории. Результаты наблюдений представляют собой классифицированную (каждому измерению поставлен в соответствие объект) совокупность измерений $Y = \{y_{11}, \ldots, y_{ji}, \ldots, y_{QN_j}\}$, сформированных в дискретные моменты времени $t_{11}, \ldots, t_{ji}, \ldots, t_{QN_j}$ и связанных с положением объекта в данные моменты уравнением $y_{i_j} = y_i(\theta_j) + \Delta y_i$, где Δy_i – ошибка измерения координаты объекта в i-й момент времени. По j-му объекту получено N_j измерений, i-е измерение положения j-го объекта производилось в момент времени t_{i_j}. Ошибки измерения координат Δy_i распределены по нормальному закону, имеют нулевые средние и одинаковую дисперсию $\sigma_И^2$. Количество объектов Q задано.

Необходимо найти: МНК-оценки параметров расходящихся траекторий (РТ), т.е. траекторий, имеющих одинаковое начальное положение и различную скорость $\theta = \{y_0, V_1, V_2, \ldots, V_Q\}$; МНК-оценки параметров параллельных траекторий (ПТ), т.е. траекторий с одинаковой скоростью и различным начальным положением $\theta = \{y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0Q}, V\}$; СКО МНК (РТ) и МНК (ПТ) – оценок параметров зависимых траекторий.

МНК-оценкой параметров траекторий является вектор [3]:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta}\left(Y - A\theta\right)^T\left(Y - A\theta\right), \tag{1}$$

где

$$A^T = \begin{Vmatrix} \dfrac{dy_{11}(\theta)}{dx_1} & \ldots & \dfrac{dy_{Q1}(\theta)}{dx_1} & \ldots & \dfrac{dy_{QN_J}(\theta)}{dx_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{dy_{11}(\theta)}{dx_R} & \ldots & \dfrac{dy_{Q1}(\theta)}{dx_R} & \ldots & \dfrac{dy_{QN_J}(\theta)}{dx_R} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

матрица плана [3], также называемая матрицей дифференциальных операторов [4]; x_r – r-й параметр совокупности зависимых траекторий; R – количество параметров совокупности зависимых траекторий.

Решением системы уравнений (1) (МНК-оценкой параметров траектории) является вектор [3]

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T Y. \tag{3}$$

В ряде случаев самостоятельный интерес имеет его скалярный аналог.

1. МНК-оценка параметров Q зависимых линейных траекторий с одинаковым начальным положением $y_{01} = \ldots = y_{0Q} = y_0$ и различной скоростью $V_1 \neq \ldots \neq V_Q$. В данных условиях выражения (1) и (2) имеют вид:

$$W_1 = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i_j=1}^{N_j}\left(y_{i_j} - y_0 - V_j t_{i_j}\right)^2; \tag{4}$$

$$A_1^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & t_{Q1} & t_{Q2} & \dots & t_{QN_Q} \end{Vmatrix}. \quad (5)$$

Выражения для производных квадратичной формы (4) по начальному положению и скоростям объектов имеют вид:

$$\frac{\partial W_1}{\partial y_0} = -2\sum_{j=1}^{Q}\sum_{i_j=1}^{N_j}\left(y_{i_j} - y_0 - V_j t_{i_j}\right);$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial V_j} = -2\sum_{i_j=1}^{N_j}\left(y_{i_j} - y_0 - V_j t_{i_j}\right) \cdot t_{i_j}. \quad (6)$$

При этом система уравнений МНК состоит из Q + 1 уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{Q}\sum\limits_{i=1}^{N_j}(y_{i_j} - y_0 - V_j t_{i_j}) = 0; \\ \sum\limits_{i_j=1}^{N_j} t_{i_j}(y_{i_j} - y_0 - V_1 t_{i_j}) = 0; \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i_j=1}^{N_j} t_{i_j}(y_{i_j} - y_0 - V_Q t_{i_j}) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно системе уравнений (7) МНК-оценкой параметров расходящихся траекторий по классифицированной выборке является оценка:

$$y_0 = \frac{D - A_C}{E - B_C}; \qquad V_j = \frac{A_j - y_0 \cdot B_j}{C_j}, \quad (8)$$

где $D = \sum\limits_{j=1}^{Q}\sum\limits_{i_j=1}^{N_j} y_{i_j}$; $A_C = \sum\limits_{j=1}^{Q}\sum\limits_{i_j=1}^{N_j}\frac{A_j}{C_j} t_{i_j}$; $B_C = \sum\limits_{j=1}^{Q}\sum\limits_{i_j=1}^{N_j}\frac{B_j}{C_j} t_{i_j}$; $E = \sum\limits_{j=1}^{Q} N_j$;

$$A_j = \sum_{i_j=1}^{N_j} y_{i_j} t_{i_j}; \quad B_j = \sum_{i_j=1}^{N_j} t_{i_j}; \quad C_j = \sum_{i_j=1}^{N_j} t_{i_j}^2. \quad (9)$$

2. МНК-оценка параметров Q зависимых линейных траекторий с одинаковой скоростью $V_{01} = \ldots = V_{0Q} = V$ и различным начальным положением $y_{01} \neq \ldots \neq y_{0Q}$. При данных условиях выражения (1) и (2) имеют вид:

$$W_2 = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i_j=1}^{N_j}\left(y_{i_j} - y_{0j} - V \cdot t_{i_j}\right)^2 ; \quad (10)$$

$$A_2^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N_1} & t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N_2} & \dots & t_{Q1} & t_{Q2} & \dots & t_{QN_Q} \end{Vmatrix} . \quad (11)$$

При этом МНК-оценка параметров параллельных траекторий по классифицированной выборке измерений может быть представлена в виде:

$$V = \frac{D - A_N}{E - B_N} ; \quad y_{0j} = \frac{1}{N_j}\left(\sum_{i_j=1}^{N_j} y_{i_j} - V\sum_{i_j=1}^{N_j} t_{i_j}\right), \quad (12)$$

где

$$D = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i_j=1}^{N_j} y_{i_j} t_{i_j} ; \; A_N = \sum_{j=1}^{Q}\left(\frac{1}{N_j}\sum_{i_j=1}^{N_j} A_j t_i\right);$$

$$B_N = \sum_{j=1}^{Q}\left(\frac{1}{N_j}\sum_{i_j=1}^{N_j} B_j t_i\right); \; E = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i_j=1}^{N_j} t_{i_j} ; \quad (13)$$

$$A_j = \sum_{i_j=1}^{N_j} y_{i_j} ; \; B_j = \sum_{i_j=1}^{N_j} t_{i_j} .$$

3. Корреляционная матрица оценок параметров зависимых линейных траекторий Q объектов, полученных на основании совокупности классифицированных измерений. В соответствии с теоремой Гаусса – Маркова корреляционная матрица оценок определяется соотношением [3]:

$$\Psi = \sigma^2 \left(A^T A\right)^{-1}. \quad (14)$$

В частном случае одинакового количества равнодискретных измерений положения двух объектов в одинаковые моменты времени ($N_1 = N_2 = N$, $t_{1i} = t_{2i} = t_i$) матрица A имеет вид

$$A^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \end{Vmatrix} . \quad (15)$$

В соответствии с (14):

$$\Psi_1^* = \sigma_И^2 \begin{Vmatrix} 2N & \sum\limits_{i=1}^{N} t_i & \sum\limits_{i=1}^{N} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{N} t_i & \sum\limits_{i=1}^{N} t_i^2 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N} t_i & 0 & \sum\limits_{i=1}^{N} t_i^2 \end{Vmatrix}^{-1} . \qquad (16)$$

Корреляционная матрица не зависит от начала отсчета времени. Предположим, что $t_0 = 0$. Введя обозначения:

$$C = \sum_{i=1}^{N} t_i = \Delta T \sum_{i=0}^{N-1} i = \Delta T \cdot \frac{N(N-1)}{2};$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} t_i^2 = \Delta T^2 \sum_{i=0}^{N-1} i^2 = \Delta T^2 \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}, \qquad (17)$$

выражение для элементов матрицы (16) можно записать в виде

$$\Psi_1^* = \sigma_И^2 \begin{Vmatrix} 2N & C & C \\ C & D & 0 \\ C & 0 & D \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{2N-1}{N(N+1)} & -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} & -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} \\ -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} & \frac{3(5N-1)}{\Delta T^2 \cdot N(N^2-1)(2N-1)} & \frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} \\ -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} & \frac{9}{\Delta T^2 \cdot N(N+1)(2N-1)} & \frac{3(5N-1)}{\Delta T^2 \cdot N(N^2-1)(2N-1)} \end{Vmatrix} . \qquad (18)$$

Матрица A для оценок параметров двух зависимых траекторий с одинаковой скоростью и различным начальным положением в аналогичных предположениях (равнодискретные измерения положения двух объектов в одинаковые моменты времени) имеет вид

$$A^T = \begin{Vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & \ldots & t_N & t_1 & \ldots & t_N \end{Vmatrix} . \qquad (19)$$

Перемножив матрицы в соответствии с (14) и используя обозначения (17), получим

$$\Psi_2^* = \sigma_И^2 \begin{Vmatrix} N & 0 & C \\ 0 & N & C \\ C & C & 2D \end{Vmatrix} = \sigma_И^2 \begin{Vmatrix} \frac{5N-1}{2N(N+1)} & \frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} & -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} \\ \frac{3(N-1)}{2N(N+1)} & \frac{5N-1}{2N(N+1)} & -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} \\ -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} & -\frac{3}{\Delta T \cdot N(N+1)} & \frac{6}{\Delta T^2 \cdot N(N^2-1)} \end{Vmatrix}. \quad (20)$$

Выводы. СКО оценок параметров зависимых траекторий пропорционально снижается по отношению к СКО МНК-оценок независимых траекторий (1). Коэффициент пропорциональности для общих параметров зависимых траекторий составляет $\eta_0 = 0{,}5$ и для уникальных параметров зависимых траекторий $\eta = \frac{5N-1}{4(2N-1)}$. Так, дисперсия оценок параметров двух зависимых линейных траекторий с одинаковой скоростью может быть определена соотношениями $\sigma^2_{y0_{(V=const)}} = \eta\sigma^2_{y0}$, $\sigma^2_{V_{(V=const)}} = 0{,}5\sigma^2_V$, а двух зависимых линейных траекторий с одинаковым начальным положением соотношениями $\sigma^2_{y0_{(y0=const)}} = 0{,}5\sigma^2_{y0}$, $\sigma^2_{V_{(y0=const)}} = \eta\sigma^2_V$. При этом коэффициент пропорциональности η изменяется в зависимости от количества измерений от 0,7 при N = 3 до 0,625 в асимптотическом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ямницкий В.А., Саваневич В.Е., Симонова О.Г. Свойства совокупности радиолокационных измерений в модифицированной орбитальной системе координат // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2004. – Вип. 7 (35). – С. 230 – 237.*
2. *Саваневич В.Е., Симонова О.Г. Оценка параметров зависимых линейных траекторий по смешанной выборке // Збірник наукових праць ІПМЕ. – К.: НАНУ, ІПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 169 – 176.*
3. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1987. – 320 с.*
4. *Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Радио и связь, 1986. – 352 с.*

Поступила 3.08.2004

***СИМОНОВА Ольга Геннадиевна**, старший научный сотрудник Объединенного НИИ ВС. В 1978 году окончила ХИИТ. Область научных интересов – обработка локационной информации.*