УДК 621.384; 533.9

ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕЖИМА ПОСТОЯННОГО ТОКА ДЛЯ РАЗГОНА ТЕЛ В РЕЛЬСОВЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

А.Б. Жолобенко
(Объединенный научно-исследовательский институт ВС, Харьков)

На основе использования принципа максимума Понтрягина показано, что оптимальным режимом разгона тел в рельсовых ускорителях при ограничениях на величину силы тока является режим предельно допустимого постоянного тока.

принцип максимума Понтрягина ,рельсовый ускоритель, режим предельно допустимого постоянного тока

Введение. Эффективность преобразования электрической энергии в кинетическую энергию метаемого тела в рельсовых ускорителях зависит от вида функции тока в процессе разгона.

С целью упрощения теоретических исследований и проведения анализа процессов, протекающих непосредственно в рельсотроне, независимо от анализа источника питания и внешних цепей принято рассматривать разгон тел в режиме постоянного тока [1, 2]. В работах [3, 4] проведена оптимизация параметров магнитоплазменного рельсового ускорителя по критерию максимума КПД и по критерию минимума энергетических потерь при заданной кинетической энергии тел на выходе канала ствола в условиях эрозионной стойкости электродов в режиме постоянного тока.

Очевидно, такой режим является оптимальным в задаче максимизации скорости тела при ограничении на величину предельно допустимого тока, а также в задаче оптимального быстродействия. Поэтому *актуальной задачей* является определение оптимальной функции тока в рельсовых ускорителях с наилучшим преобразованием подведенной электрической энергии в кинетическую энергию метаемого тела.

Цель настоящей работы – показать оптимальность режима постоянного тока в задачах разгона тел в рельсовых ускорителях с максимальным КПД, а также с минимальными энергетическими потерями при ограничении на величину силы тока.

Постановка задачи. В условиях эрозионной стойкости электродов уравнение движения тела в магнитоплазменном ускорителе под действием толкающей электромагнитной силы и сил сопротивления имеет вид [2]:

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{b}{2}I^2-Nv^2,\quad v(0)=v_0, \tag{1}$$

где m – метаемая масса; v – скорость метания; I – сила тока; b – градиент индуктивности; N – коэффициент силы противодействия.

В соответствии с формулировкой принципа максимума Понтрягина максимизацию функционала КПД заменим равносильной задачей минимизации функционала

$$\gamma=W_p/W_k\ , \tag{2}$$

где W_p – суммарные энергетические затраты на перемещение тела, преодоление сил сопротивления и тепловые потери [4],

$$W_p=\int_0^T I^2\left(R+bv+2\rho_{эл}\int_0^t\frac{v(\tau)}{S(\tau)}d\tau\right)dt\ ; \tag{3}$$

W_k – кинетическая энергия метаемого тела на выходе рельсотрона,

$$W_k=mv^2(T)/2\ ; \tag{4}$$

R – сопротивление плазменного поршня; $\rho_{эл}$ – удельное сопротивление электродов; $S(\tau)$ – мгновенное сечение токового слоя; T – время разгона.

Задача состоит в определении функции силы тока, под действием которой тело из начального положения перемещается в конечное положение. При этом функционал γ достигает минимального значения.

Обозначив $u(t)=I^2(t)$, запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dv}{dt}=\frac{b}{2m}u-\frac{N}{m}v^2 \tag{5}$$

при ограничении на величину силы тока $0\le u(t)\le u_g$. Начальная скорость задана $v(0)=v_0$. Время разгона T и конечная скорость v(T) могут быть фиксированы или свободны в зависимости от решаемой задачи и выполнения условия управляемости уравнения (5).

Принцип максимума в задаче оптимального ускорения тел в рельсотроне с заданной конечной скоростью, свободной длиной электродов и свободным временем разгона. Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина [5]:

$$H = \psi_0 u\left(R + bv + 2\rho\int_0^t \frac{v(\tau)}{S(\tau)}d\tau\right) + \psi\left(\frac{b}{2m}u - \frac{N}{m}v^2\right), \tag{6}$$

где коэффициент $\psi_0 \le 0$ всегда, а $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\psi_0 u\left(b + 2\rho\int_0^t \frac{d\tau}{S(\tau)}\right) + \psi\,\frac{2Nv}{m}. \tag{7}$$

В соответствии с принципом максимума функцию, минимизирующую функционал γ, необходимо искать среди функций, максимизирующих функцию Гамильтона-Понтрягина.

Так как коэффициент $\psi_0 \le 0$, первое слагаемое функции H при ограничении $0 \le u(t) \le u_g$ отрицательно. Поэтому можно положить $\psi_0 = 0$.

Условия трансверсальности [5] на левом конце всегда выполняются, так как он фиксирован. На правом конце имеют вид $\psi(T) = \theta$, где θ – параметр, $H(T) = 0$.

В нашей задаче H является линейной функцией по u

$$H = \psi\,\frac{b}{2m}u - \psi\,\frac{N}{m}v^2. \tag{8}$$

Ее максимум достигается на границах множества допустимых значений

$$u = \begin{cases} 0, & \psi(t) < 0; \\ u_g, & \psi(t) > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Положим в уравнении (5) $u = u_g$. Решив дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$v = \frac{m\lambda}{N}\left(\frac{e^{\lambda t} - ce^{-\lambda t}}{e^{\lambda t} + ce^{-\lambda t}}\right), \tag{10}$$

где $\lambda^2 = \frac{Nbu_g}{2m^2}$; $c = \frac{m\lambda - Nv_0}{m\lambda + Nv_0}$.

Подставляя v(t) в уравнение (7) и решая его, подчинив условию трансверсальности, получаем

$$\psi(t) = \theta\left(\frac{e^{\lambda t} + ce^{-\lambda t}}{e^{\lambda T} + ce^{-\lambda T}}\right)^2. \qquad (11)$$

Здесь $\theta \neq 0$. Иначе $\psi(t) \equiv 0$, что противоречит требованию принципа максимума $|\psi_0| + |\psi| \neq 0$ [5].

Положим $\theta < 0$, тогда $\psi(t) < 0$ для всех t. Поэтому для максимизации (8) полагаем $u(t) = 0, t \in [0, T]$, а точки переключения управления в данной задаче отсутствуют. Но с помощью нулевого управления получить конечную скорость $v(T) = v_T$ невозможно.

Положим $\theta > 0$, тогда $\psi(t) > 0$ для всех t. Поэтому $u(t) = u_g, t \in [0, T)$ максимизирует функцию (8). Из условия трансверсальности $H(T) = 0$ получаем $u(T) = 2Nv_T^2 / b$.

Так как при $u(t) = u_g$ система является управляемой на положительную полуось, то из выражения для скорости (10) при $v(T) = v_T$ находим оптимальное время T.

Таким образом, показано, что оптимальной функцией тока в поставленной выше задаче является постоянное предельно допустимое значение на всем интервале ускорения.

Принцип максимума в задаче оптимального ускорения тел в рельсотроне со свободным правым концом и свободным временем разгона. Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H = \frac{2\psi_0 u}{mv^2(T)}\left(R + bv + 2\rho_{эл}\int_0^t \frac{v(\tau)}{S(\tau)}d\tau\right) + \psi\left(\frac{b}{2m}u - \frac{N}{m}v^2\right), \qquad (12)$$

Условия трансверсальности на правом конце будут следующие[5]:

$$\psi(T) = 0; \quad H(T) = 0. \qquad (13)$$

Как и в предыдущей задаче, предположим $\psi_0 = 0$. Тогда из (7),(11) и (13) следует $\psi(t) \equiv 0$,что противоречит требованию принципа максимума $|\psi_0|+|\psi|\neq 0$ [5]. Поэтому коэффициент $\psi_0<0$. С учетом нормировки можно считать $\psi_0=-1$. Подставим это значение в уравнение (7). Положим $u(t)=u_g$, v(t) определим из выражения (10). Применив метод переменной постоянной для решения дифференциального уравнения (7) относительно $\psi(t)$, получим

$$\psi(t)=\frac{2u_g}{mv^2(T)}\left(e^{\lambda t}+ce^{-\lambda t}\right)^2\int_t^T\frac{b+2\rho_{эл}\int_0^\tau\frac{d\xi}{S(\xi)}}{\left(e^{\lambda\tau}+ce^{-\lambda\tau}\right)^2}d\tau\,. \tag{14}$$

Из (14) хорошо видно, что $\psi(t)>0;\quad 0\le t<T;\quad \psi(T)=0.$

Таким образом, мы установили, что для набора сопряженных переменных $\psi_0=-1,\quad \psi(t)>0$ функция Гамильтона-Понтрягина как линейная функция по u достигает своего максимума на экстремали $u(t)=u_g,\quad 0\le t<T;$ $u(T)=0$ следует из условия трансверсальности (13).

Выводы. В задачах оптимального ускорения тел в рельсотроне с наилучшим преобразованием подведенной электрической энергии в кинетическую энергию метаемого тела при ограничении на величину предельно допустимого тока оптимальной функцией тока является постоянная функция равная своему предельно допустимому значению. Это решение получено для произвольных параметров рельсотрона. Поэтому синтез рельсовых ускорителей в режиме постоянного тока является оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дробышевский Э.М., Жуков Б.Г., Назаров Е.В. и др. Электродинамический разгон диэлектрических тел в рельсотроне в режиме постоянного тока // ЖТФ. – 1991. – Т. 61. – № 4. – С. 170 – 179.*
2. *Shahinpoor M., Hawke R.S. Analitic solutions to dynamic equations of plasma armature railguns // IEEE Transactions on Magnetics. – 1989. – Vol. 25, № 1. – P. 508 – 513.*
3. *Жолобенко А.Б. Синтез оптимального магнитоплазменного рельсотрона для разгона неэлектропроводных тел в режиме постоянного тока // Збірник наукових праць ХВУ. – Х.: ХВУ. – 2003. – Вип. 3 (46). – С. 93 – 94.*
4. *Жолобенко А.Б., Шостко С.Н. Оптимизация профиля электродов магнитоплазменного рельсового ускорителя неэлектропроводных тел в режиме постоянного тока // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 10 (38). – С. 49 – 55.*
5. *Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.*

Поступила 14.07.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор С.Н. Шостко,
Объединенный научно-исследовательский институт ВС, Харьков.