УДК 004.8(075)+004.93(075)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛНОТЫ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ЛОГИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С ЧЕТЫРЕХЗНАЧНОЙ СЕМАНТИКОЙ

С.А. Войтович, О.М. Сорокин
(Харьковский университет Воздушных Сил)

В статье представлена алгебра для строгого логического исчисления с четырехзначной семантикой, которое предназначено для представления знаний в системах управления реального масштаба времени с использованием качественной оценки неопределенности признаковой информации. Доказана полнота предлагаемой алгебры.

логическое исчисление, четырехзначная семантика, неопределенность признаковой информации, полнота алгебры

Постановка проблемы. В настоящее время основным принципом автоматизированного управления реализованным в большинстве АСУ является принцип рационального сочетания возможностей вычислительной техники и коллектива сотрудников, проводящих логико-аналитическую обработку информации. При этом на ЭВМ возлагаются функции представления, хранения и обмена информацией, решения расчетных задач, подготовки исходных данных, документирования и обработки результатов, а на «управленцев» – функции принятия решений на основе анализа исходной информации и расчетных данных. Использование ЭВМ для решения интеллектуальных задач в интерактивном режиме затруднено в связи с высокими требованиями к производительности вычислительной техники и недостатками известных формализмов представления и манипулирования знаниями.

Разработка математического аппарата позволяющего формализовать задачи логико-аналитической обработки информации является технологической основой создания интерактивных интеллектуальных систем и их интеграции в АСУ различного назначения.

Анализ литературы. Формализмы, используемые для представления знаний, тесно связаны со средствами манипулирования этими знаниями, так как информация, которая представлена но не поддается обработке, для интеллектуальной системы является бесполезной. Наличие процедур автоматического установления истинности утверждений представленных на логическом языке определило широкое распространение формализмов основанных на математической логике.

Исторически первой попыткой создания дедуктивного логического исчисления является силлогизм Аристотеля. Силлогизм представляет собой логику классов, однако не содержит понятия дополнения класса. Неполнота силлогизма заключается в невозможности проведения логического вывода о существовании элемента некоторого класса в связи с отсутствием механизма перехода между классом суждений и его дополнением [1].

Логика высказываний (ЛВ) и логика предикатов (ЛП) имеют двухзначную семантическую область {Истина, Ложь}. Элементарным объектом ЛВ, обладающим значением истинности, является атомарное высказывание (атом). Атом является неделимой логической константой ЛВ. В ЛП элементарным объектом, обладающим значением истинности, является атомарная формула, которая состоит из предикатной константы и термов, выступающих в роли ее аргументов. В общем случае, обозначение предиката – это имя отношения, существующего между аргументами. ЛВ и ЛП являются статическими исчислениями, так как все атомы и атомарные формулы имеют единственное значение истинности, которое не изменяется во времени [2 – 4].

Группа модальных логик является расширениями классических ЛВ и ЛП. Формальные системы логик этой группы содержат определения экзистенциональных и универсальных двойственных модальных операторов. Такое определение выходит за рамки классических логик и требует явного указания правил сведения всех типов модальностей к которым могут быть приведены последовательности операторов.

Модальные логики используются для разработки и отладки отдельных частных теорий, которые позволяют формализовать те стороны практической деятельности, для отражения которых недостаточно средств классического исчисления предикатов. Однако возникают существенные затруднения при попытке объединить в одной формальной теории две и более логики в связи с возникновением кратных модальных операторов, сведение которых ведет к неопределенности. Подобные ситуации не поддаются разрешению средствами двухзначной логики [5, 6].

Многозначные логики позволяют учитывать неопределенность информации в виде неполноты (отсутствия) и неоднозначности (недостоверности) знаний. Оценки основанные на количественной мере достоверности не обеспечивают выполнение правдоподобных рассуждений в условиях неполноты знаний в связи с их субъективизмом, т.е. необходимостью определения достоверности самих оценок достоверности [7].

Цель статьи. Выбор аппарата формализации, для построения интеллектуальных систем реального времени, затруднен в связи с недостатками известных формализмов представления и манипулирования знаниями. Практический интерес представляет разработка логического исчисления позволяющего функционировать в условиях неполноты и неоднозначности знаний, снабженного процедурой логического вывода и способного к объединению в одной формальной теории модальных операторов, которые распостраняются на различные, порою непересекающиеся, индивидные области. Примером подобного формализма является логика присутствия, базовые теоретические положения которой разработаны доктором технических наук профессором В.Е.Ярушеком [8].

В статье приводятся обоснование и доказательство полноты алгебры $\{A, \Theta\}$, где A – конечное множество атомарных формул, $\Theta \in \{\vee, \wedge, \sim\}$ – множество операций данной алгебры. Данная алгебра позволяет практически реализовать теоретические положения логики присутствия в виде строгого логического исчисления с четырехзначной семантикой.

Алгебра {A, Θ} логического исчисления с четырехзначной семантикой. Источниками информации для АСУ реального масштаба времени обычно являются специализированные технические устройства, с которых информация поступает в виде значений физических измерений либо значений, которые могут быть каким либо образом выражены через другие, взаимозависимые с ними значения доступные для измерения. Будем использовать термин «информационный признак» для обозначения измеряемого значения тогда и только тогда, когда все измерения данного значения являются равновозможными. Иначе говоря, каждый информационный признак может быть описан совокупностью доступных для него равновозможных состояний. Следует заметить, что понятие «равновозможные состояния» шире понятия «равновероятные состояния» и определяются возможностью достижения признаком некоторого состояния согласно технических характеристик системы, приложенному к ней управляющему воздействию а не вероятностью перехода системы (признака) из одного состояния в другое.

Для систем с равновозможными состояниями энтропия есть мера неопределенности, равная количеству информационных разрядов, необходимых для описания всех состояний системы и может быть выражена через логарифм числа Ω всех возможных состояний системы

$$H = \log_\alpha \Omega = \frac{1}{\log_k \alpha} \cdot \log_k \Omega. \qquad (1)$$

Множитель $\log_k(\alpha)^{-1}$ определяет величину и название единицы измерения энтропии в зависимости от выбранной системы счисления. Для $\alpha = 2$ это бит, для $\alpha = 2^8$ – байт и т.д. Общее число состояний системы, которая описана n-арным количеством признаков возможно определить пользуясь методами комбинаторики, как число всех возможных комбинаций распределения значений признаков.

Информация, которую несет признак представляет собой конкретную комбинацию символов в заданной системе счисления, которая устраняет неопределенность существовавшую до измерения признака. В общем случае процесс устранения неопределенности может иметь три исхода:

– подтверждение принадлежности значения признака к множеству потенциально возможных значений;

– отрицание принадлежности значения признака к множеству потенциально возможных значений;

– нахождение значения признака в области, которая образуется в результате неточности измерений.

Определим каждый из исходов как качественное состояние признака и представим их множествами значений на метрической шкале потенциальных значений признака (рис. 1) при следующих ограничениях:

а) множество Pi потенциальных значений признака равномощно множеству R (несчетно);

б) подмножество «присутствует» $\equiv$ $Pr \in [b, c]$ замкнуто, имеет минимальный и максимальный элементы $\min Pr = b$, $\max Pr = c$, соответственно;

в) подмножество «неопределенность» $\equiv Un = (Un_1 \vee Un_2) \in (a, b) \cup (c, d)$ объединяет два ограниченных открытых подмножества, нижние и верхние грани которых равны $\inf Un_1 = a$, $\inf Un_2 = c$, $\sup Un_1 = b$, $\sup Un_2 = d$;

г) подмножество «отсутствует» $\equiv An = (An_1 \vee An_2) \in (+\infty, a] \cup [d, -\infty)$ объединяет два открытых подмножества, которые: $An_1 \in (+\infty, a]$ ограничено сверху и имеет максимальный элемент $\max An_1 = a$, $An_2 \in [d, -\infty)$ ограничено снизу и имеет минимальный элемент $\max An_2 = d$ [9, 10].

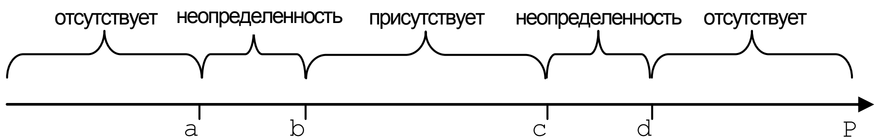

Рис. 1. Потенциальные значения признака

Динамический характер процесса управления требует анализа возможных сочетаний качественных состояний признака во времени. Будем считать, что достоверность информации о качественном состоянии признака определяется частотой повторения этого состояния во времени. Для случая, когда состояние признака в процессе измерения не меняется, частота равна

1. В случае, когда состояние признака изменилось, частота будет равна отношению количества повторений $N_{изм}$ нового состояния к $N_{изм}+1$:

$$\omega = N_{ИЗМ} / (N_{ИЗМ} + 1). \qquad (2)$$

Для случая когда изменения состояния признака за два смежных измерения происходят между состояниями разделенными областью неопределенности и частота повторения этих изменений равна ½ введем новое качественное состояние – «противоречие», которое будет обозначать отсутствие достоверной информации по данному признаку.

Логическая интерпретация качественных состояний признаков может быть основана на использовании семантических значений многозначной логики в виде следующих эквивалентностей:

– «присутствует» эквивалентно семантическому состоянию «Pr»;
– «отсутствует» эквивалентно семантическому состоянию «An»
– «неопределенность» эквивалентно семантическому состоянию «Un»;
– «противоречие» эквивалентно семантическому состоянию «Cn»

Семантическая область логического исчисления, используемого для качественной оценки признаковой информации с учетом ее неполноты и неоднозначности, будет включать четыре состояния {Pr, An, Un, Cn}. Семантические состояния «Pr», «An» отражают тот факт, что имеются достоверные знания о присутствии либо отсутствии признака. Семантическое состояние «Un» – говорит о недостоверности имеющихся знаний о том в каком из двух возможных состояний {Pr, An} находится признак. Состояние Cn – отражает полное отсутствие либо противоречивость знаний по признаку, что является эквивалентным в условиях выбора между двумя альтернативами. Каждое из семантических состояний {Pr, An, Un, Cn} также можно представить соответствующим ему цифровым эквивалентом {3, 2, 1, 0} в четырехзначной системе счисления.

Рассмотрим алгебру {A, Θ}, где A – конечное множество атомарных формул, $\Theta \in \{\vee, \wedge, \sim\}$ - множество операций, определенных на A.

Таблицы истинности для бинарных логических операций дизъюнкции, конъюнкции и унарной операции циклической смены логических состояний для атомов и формул логического исчисления с четырехзначной семантикой приведены на рис. 2.

$\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv f_i(\varphi_1, \varphi_2) = \max(\varphi_1, \varphi_2)$

φ_2 \ φ_1	**Pr**	**An**	**Un**	**Cn**
Pr	Pr	Pr	Pr	Pr
An	Pr	An	An	An
Un	Pr	An	Un	Un
Cn	Pr	An	Un	Cn

$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv f_j(\varphi_1, \varphi_2) = \min(\varphi_1, \varphi_2)$

φ_2 \ φ_1	**Pr**	**An**	**Un**	**Cn**
Pr	Pr	An	Un	Cn
An	An	An	Un	Cn
Un	Un	Un	Un	Cn
Cn	Cn	Cn	Cn	Cn

$\sim \varphi_1 \equiv f_k(\varphi_1) = \varphi_1 - 1$

φ_1	$\sim\varphi_1$
Pr	An
An	Un
Un	Cn
Cn	Pr

Рис. 2. Таблицы истинности логических операций

Обозначим бинарные логические операции $\{\vee, \wedge\}$ функциями $f_i(\varphi_1, \varphi_2)$, $f_j(\varphi_1, \varphi_2)$ а унарную операцию цикла $\{\sim\}$ – функцией $f_k(\varphi_2) = f_k(Cn, \varphi_2)$. Индексы i, j, k это номера соответствующих наборов значений представленные в десятичной системе счисления. Перебор всех вариантов значений аргументов и значений функций $f_n(\varphi_1, \varphi_2)$, приведен в табл. 1. Для 16 вариантов перебора значений аргументов φ_1, φ_2 имеем 4^{16} наборов функциональных значений $f_n(\varphi_1, \varphi_2)$. Каждый из наборов $f_i(\varphi_1, \varphi_2)$ можно интерпретировать как логическую функцию $f_n(\varphi_1, \varphi_2)$ от двух переменных.

Таблица 1

Перебор возможных вариантов значений аргументов и значений функций $f_n(\varphi_1, \varphi_2)$

№	Признаки		$f_n(\varphi_1, \varphi_2)$, $n \in \{0, \dots, 4^{16}-1\}$											
	φ_1	φ_2	f_0	f_1	f_2	…	$f_{2857697535}$	…	$f_{3835974656}$	…	$f_{4293584356}$	…	$f_{4294967295}$
16	Pr	Pr	Cn	Cn	Cn	…	An	…	Pr	…	Pr	…	Pr
15	Pr	An	Cn	Cn	Cn	…	An	…	An	…	Pr	…	Pr
14	Pr	Un	Cn	Cn	Cn	…	An	…	Un	…	Pr	…	Pr
13	Pr	Cn	Cn	Cn	Cn	…	An	…	Cn	…	Pr	…	Pr
12	An	Pr	Cn	Cn	Cn	…	Un	…	An	…	Pr	…	Pr
11	An	An	Cn	Cn	Cn	…	Un	…	An	…	An	…	Pr
10	An	Un	Cn	Cn	Cn	…	Un	…	Un	…	An	…	Pr
9	An	Cn	Cn	Cn	Cn	…	Un	…	Cn	…	An	…	Pr
8	Un	Pr	Cn	Cn	Cn	…	Cn	…	Un	…	Pr	…	Pr
7	Un	An	Cn	Cn	Cn	…	Cn	…	Un	…	An	…	Pr
6	Un	Un	Cn	Cn	Cn	…	Cn	…	Un	…	Un	…	Pr
5	Un	Cn	Cn	Cn	Cn	…	Cn	…	Cn	…	Un	…	Pr
4	Cn	Pr	Cn	Cn	Cn	…	Pr	…	Cn	…	Pr	…	Pr
3	Cn	An	Cn	Cn	Cn	…	Pr	…	Cn	…	An	…	Pr
2	Cn	Un	Cn	Cn	Cn	…	Pr	…	Cn	…	Un	…	Pr
1	Cn	Cn	Cn	Un	An	…	Pr	…	Cn	…	Un	…	Pr

Доказательство полноты алгебры $\{A, \Theta\}$ для логического исчисления с четырехзначной семантикой заключается в том, чтобы показать возможность построения логической формулы для описания любого набора значений функций $f_0 – f_{4294967295}$ из табл. 1 используя операции $\{\vee, \wedge, \sim\}$.

Обобщение критерия полноты Поста-Яблонского на случай четырехзначной логики дает результаты, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Критерий полноты Поста-Яблонского для 4-значной логики

№	Логические операции	Классы логических операций						
		K_{Cn}	K_{Un}	K_{An}	K_{Pr}	$K_{Л}$	K_{C}	K_{M}
1	$\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \max(\varphi_1, \varphi_2)$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
2	$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \min(\varphi_1, \varphi_2)$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
3	$\sim\varphi_1 \equiv \varphi_1 - 1 (\mathrm{mod}\, 4)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

Каждой строке табл. 2 взаимно однозначно сопоставлены логические операции из множества Θ а столбцам классы: K_{Cn}, K_{Un}, K_{An}, K_{Pr} – сохраняющих константы Pr, An, Un, Cn; $K_{Л}$ – линейных; K_{C} – самодвойственных и K_{M} – монотонных логических операций. Знаки «$\in$», «$\notin$» в клетке на пересечении строки и столбца обозначают принадлежит ли логическая операция к классу столбца или нет.

Согласно критерия Поста-Яблонского алгебра $\{A,\Theta\}$ является полной тогда и только тогда, когда каждому из классов K_{Cn}, K_{Un}, K_{An}, K_{Pr}, $K_{Л}$, K_{C}, K_{M} не принадлежит хотя бы одна из логических операций входящих в множество Θ [11]. По данным табл. 2 имеем два покрытия, которые порождают два базиса конъюнктивный $B_1 = \{\wedge, \sim\}$ и дизъюнктивный $B_2 = \{\vee, \sim\}$.

Дизъюнкция в рассматриваемой алгебре эквивалентна функции выбора максимального значения из ее аргументов

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv f_i(\varphi_1, \varphi_2) = \max(\varphi_1, \varphi_2); \tag{3}$$

конъюнкция – функции выбора минимального значения аргументов

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv f_i(\varphi_1, \varphi_2) = \min(\varphi_1, \varphi_2); \tag{4}$$

циклическая смена логических состояний для атомов и формул логического исчисления эквивалентно циклу по модулю 4 в 4-значной системе счисления

$$\sim \varphi_2 \equiv f_k(\varphi_2) = \varphi_2 - 1(\mathrm{mod}\ 4), \tag{5}$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in \{Pr, An, Un, Cn\}$ и $Pr \equiv 3$, $An \equiv 2$, $Un \equiv 1$, $Cn \equiv 0$.

Выразим операцию конъюнкции в базисе B_2. Для этого необходимо операцию конъюнкции представить посредством операций дизъюнкции и цикла, т.е. записать формулу состоящую из дизъюнктов φ_1, φ_2 и операций цикла, которая будет соответствовать набору значений для функции $f_{3835974656}(\varphi_1, \varphi_2)$ из табл. 1. Учтем что в алгебре $\{A,\Theta\}$ имеет место следующее тождество

$$\varphi_i = \sim\sim\sim\sim \varphi_i. \tag{6}$$

Тогда для выражения операции конъюнкции посредством операций дизъюнкции и цикла необходима такая совокупность дизъюнктов X и Y, результат дизъюнкции которых был бы меньше или равен результату конъюнкции $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ на всех возможных наборах значений для φ_1, φ_2. Полный перебор составляет 4^4 вариантов и выражается формулой

$$\bigvee_{X=\varphi_1}^{\sim\sim\sim\varphi_1} \bigvee_{X=\varphi_2}^{\sim\sim\sim\varphi_2} \bigvee_{\varphi_1=Pr}^{Cn} \bigvee_{\varphi_2=Pr}^{Cn} \begin{bmatrix} \left(\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2\right) \geq \left(X \vee Y\right)\right) \vee \\ \vee \left(\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2\right) \geq \sim\left(X \vee Y\right)\right) \vee \\ \vee \left(\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2\right) \geq \sim\sim\left(X \vee Y\right)\right) \vee \\ \vee \left(\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2\right) \geq \sim\sim\sim\left(X \vee Y\right)\right) \end{bmatrix} = 1, \tag{7}$$

где $X \in \{\varphi_1, \sim\varphi_1, \sim\sim\varphi_1, \sim\sim\sim\varphi_1\}$, $Y \in \{\varphi_2, \sim\varphi_2, \sim\sim\varphi_2, \sim\sim\sim\varphi_2\}$; неравенство $\varphi_i \geq \varphi_j = 0$, если $\varphi_j > \varphi_i$, иначе $\varphi_i \geq \varphi_j = 1$ для всех $\varphi_i, \varphi_j \in \{Pr, An, Un, Cn\}$ и $Pr > An > Un > Cn$.

Тестирование показало, что среди возможных 4^4 вариантов нет ни одного удовлетворяющего условию $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \geq (X \vee Y)$ для всех наборов значений φ_1, φ_2. Следовательно, условие записанное формулой 7 не выполняется. Аналогичные рассуждения действительны и для попытки представления операции дизъюнкции посредством операций конъюнкции и циклической смены логических состояний.

Таким образом, обобщение критерия Поста-Яблонского на случай логического исчисления с четырехзначной семантикой не может быть использовано для корректного доказательства полноты алгебры данной логики, так как невозможно выразить операцию дизъюнкции посредством операций конъюнкции и цикла или операцию конъюнкции посредством операций дизъюнкции и цикла.

Доказательство полноты алгебры {A, Θ} логического исчисления с четырехзначной семантикой. Проведем доказательство полноты алгебры {A, Θ} для логического исчисления с четырехзначной семантикой:

1) найдем с помощью операций конъюнкции и цикла формулы для функций от одной переменной все значения которых кроме одного равны Cn;

2) найдем с помощью операций конъюнкции и цикла формулы для функций от двух переменных все значения которых кроме одного равны Cn;

3) объединим посредством операции дизъюнкции некоторые из полученных формул для получения формулы для любого другого набора значений из табл. 1.

Доказательство. 1. В табл. 3 приведен полный перечень логических формул от одной переменной, которые на любом наборе значений φ_2 имеют только одно значение истинности, отличное от Cn, а на всех остальных равны Cn. В первой колонке указан номер функции $f_n(\varphi_1, \varphi_2)$, для $\varphi_1 = Cn$ из табл. 1.

2. Определим логические формулы от двух переменных такие, которые на любом наборе значений φ_1, φ_2 имеют только одно значение истинности отличное от Cn а на всех остальных равны Cn. Будем обозначать формулы из табл. 3 по эквивалентным им функциям пронумерованным в десятичной системе счисления, которые представлены соответствующими наборами значений в табл. 1:

$$f_1(\varphi_2) \equiv f_1(\varphi_1, \varphi_2) \Big|_{\varphi_1 = Cn} \equiv \sim\varphi_2 \wedge \sim\sim\varphi_2 \wedge \sim\sim\sim\varphi_2;$$

....

$$\begin{aligned} f_{192}(\varphi_2) \equiv f_{192}(\varphi_1, \varphi_2) \Big|_{\varphi_1 = Cn} \equiv &\sim\sim(\varphi_2 \wedge \sim\varphi_2 \wedge \sim\sim\varphi_2) \wedge \\ &\wedge \sim(\varphi_2 \wedge \sim\varphi_2 \wedge \sim\sim\sim\varphi_2) \wedge \\ &\wedge \sim(\varphi_2 \wedge \sim\sim\varphi_2 \wedge \sim\sim\sim\varphi_2) \wedge \\ &\wedge \sim(\sim\varphi_2 \wedge \sim\sim\varphi_2 \wedge \sim\sim\sim\varphi_2). \end{aligned} \qquad (8)$$

Полный перечень логических формул от двух переменных, которые на любом наборе значений φ_1, φ_2 имеют только одно значение истинности отличное от Cn а на всех остальных равны Cn, приведен в табл. 4.

Так как дизъюнкция в данной алгебре эквивалентна функции выбора максимального значения из ее аргументов, то для получения формулы описывающей функцию $f_n(\varphi_1, \varphi_2)$ из табл. 1 необходимо связать дизъюнкцией формулы из табл. 4 по принципу соответствия каждого значения из набора значений для $f_n(\varphi_1, \varphi_2)$ для соответствующего варианта означиваний φ_1, φ_2.

Таблица 3

Перечень логических формул от одной переменной

f_n	**Логические формулы**	**Истинность ЛФ**			
	$\boldsymbol{\varphi_2}$	**Pr**	**An**	**Un**	**Cn**
f_1	$\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2$	Cn	Cn	Cn	**Un**
f_4	$\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2$	Cn	Cn	**Un**	Cn
f_{16}	$\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2$	Cn	**Un**	Cn	Cn
f_{64}	$\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2$	**Un**	Cn	Cn	Cn
f_2	$\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim\sim\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	Cn	Cn	Cn	**An**
f_8	$\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim\sim\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	Cn	Cn	**An**	Cn
f_{32}	$\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim\sim\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	Cn	**An**	Cn	Cn
f_{128}	$\sim\sim\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	**An**	Cn	Cn	Cn
f_3	$\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	Cn	Cn	Cn	**Pr**
f_{12}	$\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	Cn	Cn	**Pr**	Cn
f_{48}	$\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	Cn	**Pr**	Cn	Cn
f_{192}	$\sim\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge$ $\wedge\sim(\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)\wedge\sim(\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\varphi_2\wedge\sim\sim\sim\varphi_2)$	**Pr**	Cn	Cn	Cn

Таблица 4

Перечень логических формул от двух переменных

№	Признаки		Логические формулы		
	φ_1	φ_2	$f_n(\varphi_1, \varphi_2)$=Un	$f_n(\varphi_1, \varphi_2)$=An	$f_n(\varphi_1, \varphi_2)$=Pr
1	Pr	Pr	$f_{64}(\varphi_1)\wedge f_{64}(\varphi_2)$	$F_{128}(\varphi_1)\wedge f_{128}(\varphi_2)$	$f_{192}(\varphi_1)\wedge f_{192}(\varphi_2)$
2	Pr	An	$f_{16}(\varphi_1)\wedge f_{64}(\varphi_2)$	$F_{32}(\varphi_1)\wedge f_{128}(\varphi_2)$	$f_{48}(\varphi_1)\wedge f_{192}(\varphi_2)$
3	Pr	Un	$f_4(\varphi_1)\wedge f_{64}(\varphi_2)$	$F_8(\varphi_1)\wedge f_{128}(\varphi_2)$	$f_{12}(\varphi_1)\wedge f_{192}(\varphi_2)$
4	Pr	Cn	$f_1(\varphi_1)\wedge f_{64}(\varphi_2)$	$F_2(\varphi_1)\wedge f_{128}(\varphi_2)$	$f_3(\varphi_1)\wedge f_{192}(\varphi_2)$
5	An	Pr	$f_{64}(\varphi_1)\wedge f_{16}(\varphi_2)$	$F_{128}(\varphi_1)\wedge f_{32}(\varphi_2)$	$f_{192}(\varphi_1)\wedge f_{48}(\varphi_2)$
6	An	An	$f_{16}(\varphi_1)\wedge f_{16}(\varphi_2)$	$F_{32}(\varphi_1)\wedge f_{32}(\varphi_2)$	$f_{48}(\varphi_1)\wedge f_{48}(\varphi_2)$
7	An	Un	$f_4(\varphi_1)\wedge f_{16}(\varphi_2)$	$F_8(\varphi_1)\wedge f_{32}(\varphi_2)$	$f_{12}(\varphi_1)\wedge f_{48}(\varphi_2)$
8	An	Cn	$f_1(\varphi_1)\wedge f_{16}(\varphi_2)$	$f_2(\varphi_1)\wedge f_{32}(\varphi_2)$	$f_3(\varphi_1)\wedge f_{48}(\varphi_2)$
9	Un	Pr	$f_{64}(\varphi_1)\wedge f_4(\varphi_2)$	$f_{128}(\varphi_1)\wedge f_8(\varphi_2)$	$f_{192}(\varphi_1)\wedge f_{12}(\varphi_2)$
10	Un	An	$f_{16}(\varphi_1)\wedge f_4(\varphi_2)$	$f_{32}(\varphi_1)\wedge f_8(\varphi_2)$	$f_{48}(\varphi_1)\wedge f_{12}(\varphi_2)$
11	Un	Un	$f_4(\varphi_1)\wedge f_4(\varphi_2)$	$f_8(\varphi_1)\wedge f_8\varphi_2)$	$f_{12}(\varphi_1)\wedge f_{12}(\varphi_2)$
12	Un	Cn	$f_1(\varphi_1)\wedge f_4(\varphi_2)$	$f_2(\varphi_1)\wedge f_8(\varphi_2)$	$f_3(\varphi_1)\wedge f_{12}(\varphi_2)$
13	Cn	Pr	$f_{64}(\varphi_1)\wedge f_1(\varphi_2)$	$f_{128}(\varphi_1)\wedge f_2(\varphi_2)$	$f_{192}(\varphi_1)\wedge f_3(\varphi_2)$

14	Cn	An	$f_{16}(\varphi_1)\wedge f_1(\varphi_2)$	$f_{32}(\varphi_1)\wedge f_2(\varphi_2)$	$f_{48}(\varphi_1)\wedge f_3(\varphi_2)$
15	Cn	Un	$f_4(\varphi_1)\wedge f_1(\varphi_2)$	$f_8(\varphi_1)\wedge f_2(\varphi_2)$	$f_{12}(\varphi_1)\wedge f_3(\varphi_2)$
16	Cn	Cn	$f_1(\varphi_1)\wedge f_1(\varphi_2)$	$f_2(\varphi_1)\wedge f_2(\varphi_2)$	$f_3(\varphi_1)\wedge f_3(\varphi_2)$

Таким образом, используя формулы, приведенные в табл. 4, и операцию дизъюнкции, можно получить выражение для любого набора значений истинности, приведенных в табл. 1. Следовательно, алгебра, включающая бинарные логические операции дизъюнкции, конъюнкции и унарную операцию циклической смены логических состояний является полной.

Выводы. В статье доказана полнота алгебры $\{A, \Theta\}$ для логического исчисления с четырехзначной семантикой {Pr,An,Un,Cn}. Показано, что минимальное множество операций данной алгебры должно включать три логические операции: дизъюнкцию, конъюнкцию и операцию циклической смены логических состояний для атомов и формул логического исчисления.

Практическое применение данной алгебры в логике присутствия позволяет создать строгое логическое исчисление использующее качественную оценку неполноты и неоднозначности знаний в котором возможна реализация процедуры сведения модальных операторов с различными индивидными областями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малпас Дж. Реляционный язык Пролог и его применение. – М. Наука, 1990. – 463 с.*
2. *Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и основания математики. – М.: Наука. 1979. – 557 с.*
3. *Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. – М.:Мир,1994. – 396 с.*
4. *Логический подход к искусственному интеллекту. От классической логики к логическому программированию / А.Тейз и др. – М.: Мир, 1990. – 429 с.*
5. *Логический подход к искусственному интеллекту: от модальной логики к логике баз данных / А. Тейз, П. Грибомон, Г. Юлен и др. – М.: Мир, 1998. – 494 с.*
6. *Костюк В.Н. Элементы модальной логики. – К.: Наук. думка, 1978. – 178 с.*
7. *Искусственный интеллект: В 3-х кн. / Под ред. Д.А.Поспелова. – Кн. 2. Модели и методы: Справочник - М.: Радио и связь, 1990. – 304 с.*
8. *Теоретические основы автоматизации процессов выработки решений в системах управления: Учебник / В.Е.Ярушек, В.П.Прохоров, Б.Н.Судаков, А.В.Мишин. – Х.: ХВУ, 1993. – 446 с.*
9. *Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.*
10. *Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 564 с.*
11. *Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. – М.: Наука, 2000. – 544 с.*

Поступила 28.07.2005

Рецензент: кандидат технических наук, профессор Б.Н. Судаков,
Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.