УДК 356.131 : 81.93.05 : 614.8.002.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫТЕКАНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ РЕЗЕРВУАРА В РЕЖИМЕ «ВЫСТРЕЛ С ПРОДОЛЖЕНИЕМ»

Н.И. Адаменко
(факультет военной подготовки Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры)

Проведено математическое моделирование вытекания жидкости из резервуара установки автоматического пожаротушения в режиме «Выстрел» и «Продолжение». По полученным формулам выполнены численные расчеты, демонстрирующие преимущества режима «Выстрел с Продолжением».

автоматическое пожаротушение, режим «Выстрел», режим «Продолжение», резервуар, вытекание жидкости

Введение. Проблема обеспечения пожарной безопасности объектов хранения взрывчатых веществ является достаточно актуальной для Украины, о чем свидетельствуют чрезвычайные ситуации на арсеналах в Артемовске и Новобогдановке.

Классические установки автоматического пожаротушения [1 – 3] применимы на таких объектах в чрезвычайно ограниченном объеме в связи с недостаточной интенсивностью пожаротушения. Исходя из этого, возникает научная задача расчета установки пожаротушения нового типа.

Постановка задачи. Рассматривается вытекание жидкости из резервуара автоматической установки пожаротушения (АУПТ) по трубе, один конец которой вмонтирован в дно резервуара, а другой выведен в атмосферу. В верхней герметической части резервуара вмонтирован клапан, который открывается тогда, когда давление в резервуаре оказывается ниже атмосферного $P_а$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в верхней части резервуара находился газ, который занимал объем $V_{г.н}$ и создавал давление $P_н$, а нижняя часть резервуара была заполнена жидкостью. Предполагается, что объем, занятый жидкостью $V_{ж.н}$, достаточно большой для того, чтобы реализовался рассматриваемый ниже режим вытекания жидкости из резервуара по цилиндрической трубе радиуса a и длиною L.

1. Описание математической модели. Если $P_н > P_а$, то клапан закрыт, и жидкость под действием перепада давлений начнет вытекать по трубе в атмосферу. При этом газ будет расширяться, занимая объем ушедшей из резервуара жидкости. Соответственно давление $P = P(t)$, которое создает газ в резервуаре, будет со временем уменьшаться.

Как показано в [4], система уравнений, описывающая такое вытекание жидкости, существенно упрощается, если время вытекания жидкости $t_в$ удовлетворяет неравенству

$$t_в \ll t_\upsilon, \tag{1}$$

где

$$t_\upsilon = \frac{a^2}{4\upsilon} \; - \tag{2}$$

время установления равновесия в поперечном круговом сечении трубы, обусловленное действием силы вязкости; а υ – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

При выполнении неравенства (1) действием силы вязкости в течение промежутка времени $t_в$ можно пренебречь. В этом случае жидкость вытекает, как идеальная, со скоростью

$$v_z\,(r,t) = v(t)\eta\,(a - r), \tag{3}$$

направленной вдоль оси трубы (ось z), где r – расстояние от оси трубы кругового сечения, а η – функция Хевисайда, которая равна единице, когда ее аргумент положительный, и равна нулю, когда ее аргумент отрицательный.

Согласно [4] полная система уравнений, которая описывает рассматриваемое вытекание жидкости, записывается в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho L}\left[P(t) - P_a - \rho g H(t)\right]; \tag{4}$$

$$P(t) = \frac{P_н V_{г.н.}}{V_{г.н.} + W(t)}\,; \tag{5}$$

$$H(t) = H_0 + \frac{1}{S}W(t)\,, \tag{6}$$

где

$$W(t) = \pi a^2 \int_0^t v(t')dt' \; - \tag{7}$$

объем жидкости, который вытечет из резервуара к моменту времени t (расход жидкости к моменту t); ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; H(t) – разность высот в момент времени t между положением уровня жидкости в резервуаре и положением конца трубы, выведенного в атмосферу; S – площадь сечения резервуара в плоскости, перпендикулярной вертикальной оси. Положение резервуара и конца трубы, а также площадь S предполагаются постоянными. Знак разности высот H_0 в момент времени t = 0 определяется выбором знака гидростатического давления (третье слагаемое в правой части уравнения (4)):

$$H_0 = |H_0|\,, \text{ если в } t = 0 \text{ конец трубы выше уровня жидкости;} \tag{8}$$

$$H_0 = -|H_0|, \text{ если в } t = 0 \text{ конец трубы ниже уровня жидкости.} \qquad (9)$$

Полную систему трех уравнений (4) – (6) относительно трех искомых функций v(t), P(t), H(t) следует дополнить начальными условиями, которые в нашем случае записываются в виде:

$$v(t = 0) = 0; \; P(t = 0) = P_н; \; H(t = 0) = H_0. \qquad (10)$$

Исходя из системы уравнений (4) – (6) и начальных условий (10) проведем сначала качественное исследование различных этапов вытекания жидкости из резервуара. Очевидно, что необходимым условием вытекания жидкости из резервуара является положительность правой части уравнения (4) в начальный момент времени $t = 0$. Будем считать, что начальное давление P_H достаточно велико. Соответствующее неравенство будет получено во втором разделе (см.(17) и (18)).

Согласно уравнению (5), при вытекании жидкости давление газа P(t) уменьшается, но пока $P(t) > P_a$ и правая часть уравнения (4) положительная скорость движения жидкости будет увеличиваться. Этот первый этап ускорения жидкости под действием расширяющегося газа, давление которого выше атмосферного, отвечает режиму «Выстрел» , который теоретически и экспериментально исследовался в работах [3, 4].

По мере вытекания жидкости давление в резервуаре будет падать так, что в некоторый момент времени t_a давление в резервуаре окажется равным атмосферному. Дальнейшее вытекание жидкости при $t > t_a$ приведет к тому, что клапан, вмонтированный в верхнюю часть резервуара, откроется и давление в резервуаре все время будет поддерживаться на уровне атмосферного.

В итоге при $t \geq t_a$ реализуется второй этап вытекания жидкости из резервуара с открытым клапаном, который назовем этапом «Продолжение», поскольку при этом жидкость продолжает двигаться при постоянном давлении P_a. Тогда весь исследуемый здесь режим вытекания жидкости назовем режимом «Выстрел с Продолжением».

Если бы клапан отсутствовал, то на втором этапе давление в резервуаре оказалось бы меньше атмосферного, что привело бы к возникновению силы торможения, обусловленной перепадом давлений между атмосферой и резервуаром, и соответственно к уменьшению скорости движения жидкости. Такой второй этап вытекания жидкости был исследован в работе [4], где он был назван этапом «Подпор». А весь режим вытекания без клапана, который состоит из первого и второго этапов, в [4] получил название «Выстрел с Подпором».

На этапе « Продолжение» при $t \geq t_a$ уравнение (5) следует заменить на равенство

$$P(t \geq t_a) = P_a, \qquad (11)$$

а уравнение (4) записать в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{L} gH\,. \qquad (12)$$

Если резервуар находится выше уровня конца трубы, выведенного в атмосферу, то, согласно (9), $H < 0$. При этом правая часть уравнения (12) положительная величина и на этапе «Продолжение» жидкость будет продолжать вытекать из резервуара с ускорением до тех пор, пока не нарушится неравенство (1) и не начнет действовать сила вязкости, которая, в конце концов, приведет к Пуазейлевскому вытеканию жидкости по трубе [5] из резервуара.

Если же резервуар находится ниже уровня конца трубы, выведенного в атмосферу, то согласно (8) $H > 0$. При этом правая часть уравнения (12) оказывается отрицательной и скорость движения жидкости будет уменьшаться от ее максимального значения, которое она приобрела на этапе «Выстрел», до нуля. Если при этом будет выполнено неравенство (1), то второй этап при $t > t_a$ описывается уравнением (12). В противном случае в правой части уравнения (12) следует еще учесть и силу вязкости.

2. Применение метода последовательных приближений. Для получения аналитического описания режима «Выстрел с Продолжением» нужно найти функции $v(t \leq t_a)$, $P(t \leq t_a)$, $H(t \leq t_a)$, удовлетворяющие уравнениям (4) – (6) и начальным условиям (10), и функции $v(t \geq t_a)$, $H(t \geq t_a)$, которые удовлетворяют уравнениям (6),(12). При $t = t_a$ решения уравнений (4) – (6) должны совпадать с решением уравнений (6), (12).

Аналитическое решение такой, строго поставленной, математической задачи в настоящее время, по-видимому, невозможно. Можно получить численное решение этой задачи с помощью компьютера. Между тем всегда предпочтительным является пусть приближенное, но аналитическое решение, которое позволяет понять физику процессов и рассмотреть различные случаи исходя из одного аналитического решения.

В связи с вышесказанным воспользуемся методом последовательных приближений для получения решений упомянутых выше уравнений, который позволил получить решения для режимов «Выстрел» [4] и «Выстрел с Подпором» [4]. При этом мы ограничимся только первым приближением, которого, как правило, достаточно для практических целей. В случае необходимости второе, третье и т.д. приближения могут быть получены по схеме, изложенной в работе [4].

В первом приближении при $0 \leq t \leq t_a$ в правой части уравнения (4) функции $P(t)$ и $H(t)$ заменим их средними значениями $\overline{P}$ и $\overline{H}$. В итоге при $t \leq t_a$ вместо (4) имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho L}\left(\overline{P} - P_a - \rho g \overline{H}\right). \tag{13}$$

Значение $\overline{P}$ можно считать равным арифметическому среднему от максимального $P(t = 0) = P_н$ и минимального $P(t = t_a) = P_a$ давлений на рассматриваемом интервале времени

$$0 \le t \le t_a. \tag{14}$$

Тогда

$$\overline{P} = \frac{(P_н + P_a)}{2}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13) и интегрируя, с учетом (10), получим

$$v(t \le t_a) = \frac{1}{2\rho L}\left(P_н - P_a - 2\rho g \overline{H}\right) \cdot t. \tag{16}$$

Поскольку на этапе «Выстрел» скорость движения жидкости увеличивается за счет расширяющегося газа, то первое приближение (16) предполагает, что

$$P_н > P_a + 2\rho g H \text{ при } H > 0 \tag{17}$$

и

$$P_н > P_a \text{ при } H < 0. \tag{18}$$

Будем считать, что условия (17) и (18) всегда выполняются. Более того, на практике в основном будут реализоваться даже не просто неравенства (17) и (18), а сильные неравенства, что отвечает достаточно большому начальному давлению газа в резервуаре.

Необходимо отметить, что полученное в первом приближении решение (16), не описывает течение жидкости в промежутке времени достаточно близком к t_a, когда $\overline{H} > 0$. Действительно, при $H > 0$ правая часть исходного уравнения (4) обращается в нуль в момент времени t_k, который определяется уравнением

$$P(t_k) = P_a + \rho g H(t_k). \tag{19}$$

Поскольку при $H > 0$ давление $P(t_k) > P_a$, то время $t_k < t_a$. В промежутке времени

$$t_k \le t \le t_a \tag{20}$$

правая часть исходного уравнения (4) будет отрицательной, что приведет к уменьшению скорости на интервале времени (20).

Это обстоятельство не отображается решением первого приближения (16). Однако при выполнении неравенства (17), которое, как правило, является еще и сильным неравенством, вклад в полное значение скорости от интервала времени (20) является малым. В силу этого для практических целей достаточно первого приближения (16), которое предполагает увеличение скорости движения жидкости на всем промежутке времени (14).

Для дальнейшего удобно ввести отнормированное на начальный перепад давления безразмерное гидростатическое давление равенством

$$G = \frac{2\rho g\overline{H}}{P_н - P_a}. \qquad (21)$$

Согласно неравенству (17)

$$G < 1. \qquad (22)$$

С учетом (21) результат (16) перепишем в виде

$$v(t \le t_a) = \frac{1}{2\rho L}(P_н - P_a)(1 - G)\,t. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (7) и интегрируя, для расхода жидкости получим

$$W(t \le t_a) = \frac{\pi a^2}{2\rho L}(P_н - P_a)(1 - G)\,t^2. \qquad (24)$$

Подстановка (24) в (5) и (6) дает соответственно явную зависимость от времени давления в резервуаре $P(t \le t_a)$ и разности высот $H(t \le t_a)$.

Время t_a получим исходя из равенства (5), в левой части которого $P(t = t_a)$ заменим на P_a, а в знаменатель правой части подставим явное выражение (24) при $t = t_a$. В итоге имеем

$$t_a = \sqrt{\frac{4V_{г.н.}\rho L}{\pi a^2 P_a(1 - G)}}. \qquad (25)$$

Выражения (23) – (25) и (5), (6), с учетом (24), в первом приближении полностью описывают процесс вытекания жидкости из резервуара на интервале времени (14), который отвечает этапу «Выстрел».

Перейдем к рассмотрению вытекания жидкости по трубе на этапе «Продолжение», которому отвечает время $t \ge t_a$. При решении задачи ограничимся первым приближением, при котором функцию $H(t)$ в правой части уравнения (12) заменим ее средним значением $\overline{H}$. Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$v(t \ge t_a) = \frac{1}{2\rho L}(P_н - P_a)(t_a - Gt). \qquad (26)$$

Константа интегрирования в (26) выбрана так, что решение (26) совпадает с решением (23) при $t = t_a$.

Расход жидкости при $t \ge t_a$ согласно (7) можно записать в виде

$$W(t \ge t_a) = W(t_a) + \int_{t_a}^{t} v(t')\,dt'. \qquad (27)$$

Подставляя (26) в (27) и интегрируя, с учетом выражения (24) при $t = t_a$ получим

$$W(t \ge t_a) = \frac{\pi a^2}{4\rho L}(P_н - P_a)\left(2t_a t - t_a^2 - Gt^2\right). \tag{28}$$

Если резервуар расположен ниже конца трубы, выведенного в атмосферу, то G меняется в пределах

$$0 < G < 1. \tag{29}$$

Такая ситуация возникает, в частности, если резервуар расположен ниже уровня земли, а конец трубы – выше уровня земли. В этом случае, согласно (26), скорость движения жидкости по трубе уменьшается со временем так, что в момент времени t_0 обращается в нуль. Момент времени t_0 находится из уравнения (26), в левой части которого скорость нужно положить равной нулю, а в правой части t считать равным t_0. В итоге получим

$$t_0 = \frac{1}{G}t_a \quad \text{или} \quad t_0 = \frac{2}{Ga}\sqrt{\frac{V_{г.н.}\rho L}{\pi P_a(1-G)}}. \tag{30}$$

Таким образом, при изменении G в пределах (29) второй этап «Продолжение» реализуется в промежутке времени, удовлетворяющем неравенствам:

$$t_a \le t \le \frac{1}{G}t_a. \tag{31}$$

При этом предполагается, что

$$t_0 = \frac{1}{G}t_a \ll t_\upsilon. \tag{32}$$

Если неравенство (32) нарушится, то необходимо учитывать и силу вязкости, которая, наряду с гидростатическим давлением, будет уменьшать скорость движения жидкости. В итоге скорость движения жидкости обратится в нуль до момента времени t_0.

Скорость изменения расхода жидкости с течением времени дается производной от функции (28) по t, которая равна

$$\frac{dW(t \ge t_a)}{dt} = \frac{\pi a^2}{2\rho L}(P_н - P_a)(t_a - Gt). \tag{33}$$

Когда G меняется в пределах (29), скорость изменения расхода жидкости (33) убывает со временем на интервале (31),обращаясь в нуль при $t = t_0$. При этом расход жидкости достигает своего максимального значения равного

$$W(t_0) = \frac{\pi a^2}{4\rho LG}\left(P_н - P_ф\right)(1-G)\cdot t_a^2. \tag{34}$$

Если резервуар расположен выше конца трубы, выведенного в атмосферу, то $G < 0$. Такая ситуация возникает, в частности, если резервуарар поднят достаточно высоко над уровнем земли. В этом случае скорость (26) и скорость изменения расхода жидкости (33) увеличиваются с течением времени. В итоге при $G < 0$ и $t \geq t_a$ второй этап «Продолжение» будет продолжаться до тех пор, пока выполняется неравенство (1). При этом сила вязкости будет уменьшать скорость движения жидкости так, что, в конце концов, наступит Пуазейлевский режим вытекания жидкости по трубе [5] из резервуара.

3. Пример применения математической модели. Выполним численные расчеты, которые проиллюстрируют возможности режимов «Выстрел с Подпором» и «Выстрел с Продолжением».

Возьмем следующие численные значения:

$$L = 10 \text{ м}; \; a = 2 \text{ см}; \; G = 0; \; V_{г.н} = 4 \text{ л}; \; P_н = 10 \text{ ат}. \tag{35}$$

Пусть резервуар заполнен водой при температуре 20 ^{o}С.

Для численных значений (35) по формулам (2) и (25) имеем

$$t_\upsilon = 100 \text{ сек.}; \; t_a = 1{,}128 \text{ сек.} \tag{36}$$

Если клапан отсутствует, то в режиме «Выстрел с Подпором» жидкость остановится [4] в момент времени

$$t_{под} = \frac{P_н + P_a}{P_a} t_a = 12{,}4 \text{ сек.} \tag{37}$$

При этом неравенство $t_{под} << t_\upsilon$ выполняется. За время $t_{под}$, согласно [4], из резервуара вытечет объем воды, равный

$$W_{под}(t_{под}) = V_{г.н} \frac{P_н^2 - P_a^2}{P_a^2} = 396 \text{ л.} \tag{38}$$

В режиме «Выстрел с Продолжением», когда в верхнюю часть резервуара вмонтирован клапан, за то же время (37), согласно (28), (35) и (36) вытечет объем воды, равный

$$W(t = 12{,}4 \text{ сек}) = 750 \text{ л.} \tag{39}$$

Объем (39) почти вдвое превышает объем (38). Кроме того, в режиме «Выстрел с Продолжением» вода будет продолжать вытекать со скоростью, которая, согласно (26), не зависит от времени при $G = 0$, и для значений (35) численно равной

$$v(t \geq t_a) = 5 \cdot 10^3 \text{ см/сек.} \tag{40}$$

Отметим, что скорость (40) существенно превышает [5] критическую скорость устойчивого Пуазейлевского течения жидкости по трубе. Этот вопрос достаточно подробно обсуждался в [4].Здесь только отметим, что потеря устойчивости течения приведет к уменьшению численных значений (38) и (39).

В режиме «Выстрел с Продолжением» жидкость будет продолжать вытекать со скоростью (40) до тех пор, пока не нарушится неравенство

(1). Таким образом, если объем резервуара достаточно велик, и для пожаротушения объекта необходим большой объем воды, то затраты на монтировку и обслуживание клапана являются оправданными.

Выводы. В статье выполнено математическое моделирование вытекания жидкости по трубе из резервуара под действием расширяющегося газа. При этом в верхней части резервуара имеется клапан, который открывается, когда давление газа в резервуаре оказывается ниже атмосферного. Это обеспечивает два этапа вытекания жидкости из резервуара: «Выстрел» и «Продолжение».

На первом этапе «Выстрел», когда давление газа в резервуаре превышает атмосферное, клапан закрыт и жидкость ускоряется, достигая максимальной скорости движения.

На втором этапе «Продолжение », когда давление газа в резервуаре падает ниже атмосферного, клапан открывается и поддерживает в резервуаре давление, близкое к атмосферному. В итоге жидкость продолжает вытекать из резервуара при отсутствии перепада давлений между атмосферой и резервуаром.

Для первого и второго этапа режима «Выстрел с Продолжением» получены явные зависимости от времени и параметров установки для скорости течения жидкости по трубе v(t) (23) и (26), для расхода жидкости W(t) (24) и (28), для давления газа в резервуаре P(t) (5) с (24) и (11), для перепада высот H(t) (6) с (24) и (6) с (28) между уровнем жидкости в резервуаре и положением конца трубы, выведенного в атмосферу.

По полученным формулам выполнены численные расчеты, которые иллюстрируют преимущества режима «Выстрел с Продолжением». Эти преимущества оправдывают монтирование и обслуживание клапана в верхней герметической части резервуара.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качалов А.А. Противопожарное водоснабжение. – М.: Стройиздат, 1985. – 285 с.*
2. *Адаменко М.І., Гелета О.В., Федюк І.Б. Розробка методики пожежогасіння складів вибухових речовин за допомогою автоматичної установки пожежогасіння нового типу // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 12 (40). – С. 3 – 6.*
3. *Адаменко М.І., Федюк І.Б. Нова методика пожежогасіння складів вибухових речовин // Пожежна безпека. . – Львів: ЛІПБ. – 2004. – Вип. 5. – С. 45 –47.*
4. *Адаменко М.І., Гелета О.В. Математична модель витікання рідини з резервуара у режимі „Постріл” // Науковий вісник будівництва. – Х.: ХДТУБА. – 2005. – Вип. 30, т. 2. – С. 147 – 152.*
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика – М .: Наука, 1986. – 733 с.*

Поступила 4.03.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор И.Г. Черванев,
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина.