УДК 519.713

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

В.В. Косенко[1], М.Ф. Сидоренко[2], М.І. Гіневський[1]
([1]Харківський університет Повітряних Сил; [2]НТ СКБ „ПОЛІСВІТ”, Харків)

У статті запропонований алгоритм моделювання на ПЕОМ нестаціонарних випадкових процесів, реалізований на ПЕОМ.

алгоритм, нестаціонарний випадковий процес, ергодичність, синтез

Вступ. Практичний інтерес представляє розробка методів цифрового моделювання випадкових процесів (ВП), заданих одномірною щільністю розподілу (ОЩР) f(x, t) і кореляційною функцією (КФ) R(S, t). У загальному випадку, коли ОЩР не є гаусівською, застосування методу нелінійного перетворення викликає труднощі через складність визначення КФ вихідного нормального ВП. Інші відомі методи (метод неканонічного представлення і рандомізації) не дозволяють одержувати реалізації ВП ергодичними відносно заданих ОЩР і КФ [1 – 3].

У даній статті запропоновано комбінаторний підхід до моделювання ВП з потрібними ОЩР і КФ, що дозволяє синтезувати ВП або одною реалізацією, або сукупністю реалізацій.

1. Сильностаціонарні і сильноергодичні випадкові процеси. Нехай

$$\left\| x_i^{(k)} \right\|_{i=1,\dots,\infty}^{k=1,\dots,\infty} - \tag{1}$$

гіпотетичний ансамбль дискретних реалізацій деякого ВП, де $x_i^{(k)}$ – і-й відлік у k-й реалізації, тобто $x_i^{(k)} = x^{(k)}(i\Delta t)$ (Δt – крок дискретизації параметра). Нехай також θ – деяка ймовірнісна характеристика ВП. Оскільки у виразі (1) присутні дві змінні (номер реалізації та час), то можна записати наступні оцінки для θ:

$$\hat{\theta}_t^{(L)} = \frac{1}{L}\sum_{k=L_t+1}^{L_t+L} g\left[x_t^{(k)}\right];\ \hat{\theta}_k^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=N_k+1}^{N_k+N} g\left[x_t^{(R)}\right];\ \hat{\theta}_{cp}^{(L,N)} = \frac{1}{LN}\sum_{k=L_i+1}^{L_t+L}\sum_{i=N_k+1}^{N_k+N} g\left[x_i^{(k)}\right],$$

де $g[\cdot]$ – оператор перетворення даних. Будемо вважати, що $\hat{\theta}_t^{(L)}$, $\hat{\theta}_k^{(N)}$ і $\hat{\theta}_{cp}^{(L,N)}$ сходяться до деяких θ_t, θ_k, θ_{cp} при $L \to \infty$ і $N \to \infty$.

ВП є ***стаціонарним*** відносно θ, якщо $\theta_t = \text{const}$; ВП є ***ергодичним*** відносно θ, якщо $\theta_k = \text{const}$. Очевидно, якщо ВП стаціонарний, то $\theta_t = \theta_{cp}$; якщо ВП ергодичний, то $\theta_k = \theta_{cp}$; якщо ВП стаціонарний і ергодичний, то $\theta_t = \theta_{cp} = \theta_k$.

ВП є ***сильностаціонарним*** відносно θ, якщо для $\forall N_k$ $\hat{\theta}_k^{(N)} = \theta_k + \varepsilon_{k,N}$, де $\varepsilon_{k,N}$ – випадкова величина з $M[\varepsilon_{k,N}] = 0$ і $D[\varepsilon_{k,N}] = \sigma_{k,N}^2 < \infty$. ВП є ***сильноергодичними*** відносно θ, якщо для будь-якого L_t $\hat{\theta}_t^{(L)} = \theta_t + \varepsilon_{t,L}$, де $\varepsilon_{t,L}$ – випадкова величина з $M[\varepsilon_{t,L}] = 0$, $D[\varepsilon_{t,L}] = \sigma_{t,L}^2 < \infty$.

Можна показати, що мають місце наступні твердження:

1) наслідком сильної стаціонарності є стаціонарність;
2) наслідком сильної ергодичності є ергодичність;
3) якщо ВП стаціонарний і сильноергодичний, то він і сильностаціонарний;
4) якщо ВП сильностаціонарний і ергодичний, то він і сильноергодичний.

Формально можна розрізняти сім класів ВП щодо характеристики θ: стаціонарні ергодичні (С-Е), стаціонарні неергодичні (С-НЕ), нестаціонарні ергодичні (НС-Е), нестаціонарні неергодичні (НС-НЕ), сильностаціонарні сильноергодичні (СС-СЕ), сильностаціонарні неергодичні (СС-НЕ), нестаціонарні сильноергодичні (НС-СЕ).

2. Синтез однією реалізацією. Нехай ВП x(t), $\{0 \le t \le T\}$, задані ОЩР f(x) і КФ R(τ) і обраний крок дискретизації $\Delta t = T/N$. Запронований метод моделювання реалізації ВП $(x_1, \ldots, x_N)$ полягає в послідовному виконанні N кроків. На першому кроці в якості x_1 береться випадкове число з щільністю розподілу f(x). На кроці n (n = 2, … , N) відлік вибирається з множини $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1,\ldots,L}$ (що містить при n = 2 L незалежних випадкових чисел із щільністю розподілу f(x)) таким чином, щоб досягти мінімуму функціонала

$$\Phi^{(n)} = \sum_{k=1}^{M^{(n)}} \left(R[k] - \hat{R}^{(n)}[k]\right)^2 , \qquad (2)$$

де R[k] = R(kΔt); $\hat{R}^{(n)}[k]$ – оцінка КФ на послідовності $(x_1, \ldots, x_N)$;

$$M(n) = \begin{cases} n-1, & \text{если} \quad n \le M; \\ M, & \text{если} \quad n > M; \end{cases}$$

M – задане число відліків КФ на інтервалі кореляції. Після вибору $x_n = \xi_i \in \Xi$ елемент ξ_i удаляється з Ξ і на його місце міститься нове випадкове число зі щільністю f(x).

ВП за побудовою є СС-СЕ відносно ОЩР і КФ. Очевидно, при L = 1 виходить реалізація ВП із КФ, тотожно рівна нулю. Рекомендується вибирати величину L такою, щоб виконувалося M ≤ L << N.

До задачі мінімізації функціонала (2) можна додати обмеження $\left|x_{n-1} - x_n\right| < h$, де h – величина, яка обмежує розкид сусідніх відліків ВП, що дозволяє одержувати більш гладкі реалізації. Виконання нерівності розуміється у імовірнісному змісті. Величина h може бути визначена експериментально.

Метод реалізований у виді програми у середовищі C++ і пройшов експериментальну перевірку на ПЕОМ для різних f(x) і R(τ). Помилка моделювання $\sigma_{ош}$ розраховується за формулою

$$\sigma_{ош} = \frac{1}{R[0]}\left[\frac{1}{M}\sum_{h=1}^{M^{(n)}}\left(R[h] - \hat{R}^{(N)}[k]\right)\right]^{1/2}.$$

З використання даного підходу розроблені робочі алгоритми моделювання векторних стаціонарних ВП $X(t) = \left\|x_1(t), \ldots, x_k(t)\right\|^T$, заданих вектором одномірних щільностей розподілу $f(x) = \left\|f_1(x), \ldots, f_k(x\right\|)^T$ і кореляційною матрицею $\left\|R_{ij}(\tau)\right\|_{j=1,\ldots,k}^{i=1,\ldots,k}$ і скалярних однорідних двовимірних полів {x(s, t), 0 ≤ s ≤ S, 0 ≤ t ≤ T}, заданих ОЩР та КФ R(u, v) = M[x(s, t) x(s + u, t + v)]. Алгоритми реалізовані у виді програм і пройшли експериментальну оцінку.

3. Синтез сукупністю реалізацій. Нехай ВП {X(t), 0 ≤ t ≤ T} заданий ОЩР f(x, t) і КФ R(s, t) і обраний крок дискретизації параметра Δt = T/N. Будемо моделювати L реалізацій одночасно. Через $x_n^{(i)}$ позначимо n-й відлік у i-й реалізації. Послідовно виконаємо N кроків.

Формально на кожнім кроці n відліки $x_n^{(i)}$ визначимо у вигляді

$$x_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{L} C_{ij}^{(n)} \xi_j^{(n)}, \quad i = 1, \ldots, L,$$

де $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_L^{(n)}$ – вибірка незалежних випадкових чисел із щільністю f(x, n, Δt), а $C_{ij}^{(n)}$ визначаються з рішення задачі цілочисельного програмування:

$$\min_{C_{ij}^{(n)}} \Phi^{(n)}\left(R, \hat{R}^{(n)}\right); \ \sum_j C_{ij}^{(n)} = 1; \ \sum_i C_{ij}^{(n)} = 1; \ C_{ij}^{(n)} \in \{0,1\}; \ i, j = 1, \ldots, L, \quad (3)$$

де R – задана КФ; $\hat{R}^{(n)}$ – оцінка КФ на масиві $\left\| x_i^k \right\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,L}$.

У залежності від того, як визначається КФ – за реалізацією:

$$\hat{R}_i^{(n)}[k] = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} \left(x_j^{(i)} - m\right)\left(x_{j+k}^{(i)} - m\right); \quad m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t) dx = m_t = \text{const},$$

або за ансамблем:

$$\hat{R}[n-k, n] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \left(x_{n-k}^{(i)} - m_{n-k}\right)\left(x_n^{(i)} - m_n\right), \quad m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, i\Delta t) dx,$$

функціонал у (3) можна записати відповідно у вигляді

$$\Phi^{(n)} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{M^n} \left(R[k] - \hat{R}_i^{(n)}[k]\right)^2 \quad (R(s,t) = R(t-s)), \quad (4)$$

або
$$\Phi^{(n)} = \sum_{k=1}^{M^{(n)}} \left(R[n-k, n] - \hat{R}[n-k, n]\right)^2, \quad (5)$$

де
$$M^{(n)} = \begin{cases} n-1, & \text{якщо } n \le M; \\ M, & \text{якщо } n > M, \end{cases}$$

M – задане число відліків КФ на інтервалі кореляції.

Під рішенням задачі (3) розуміємо таке рішення, що забезпечує представлення оцінки КФ у вигляді $\hat{R}^{(n)} = R + \delta_n$, де δ_n – випадкова величина з $M[\delta_n] = 0$ і $D[\delta_n] = \delta_n^2 < \infty$.

На першому кроці можна покласти $C_{ij}^{(1)} = 1$, якщо i = j та $C_{ij}^{(1)} = 0$, якщо i ≠ j. Модульований ВП за побудовою є СЕ відносно ОЩР, або СС-СЕ відносно КФ, якщо береться (4), або СЕ, якщо береться (5).

Висновок. За даною методикою розроблені робочі алгоритми для моделювання нестаціонарних випадкових процесів і проведене моделювання на ПЕОМ, що дало задовільні результати.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Поляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Сов. радио, 1971. – 400 с.*
2. *Расщепляев Ю.С., Фандиенко В.Н. Синтез моделей случайных процессов для исследования автоматических систем управления. – М.: Энергия, 1981. – 145 с.*

3. *Филаретов Г.Ф., Глазунова Н.А. Обзор методов моделирования одномерных случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками // Труды МЭИ. – 1976. – Вып. 300. – С. 62 – 70.*

Надійшла 23.02.2005

Рецензент: доктор технічних наук, професор С.В. Козелков, Національна академія оборони України, Київ.