УДК 389.14

УЧЕТ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

И.П. Захаров
(Харьковский национальный университет радиоэлектроники)

Методом Монте-Карло произведен расчет коэффициентов охвата композиции двух законов распределения Стьюдента, применяемых при обработке косвенных многократных измерений с коррелированными входными величинами, а также расчет эффективной взвешенной оценки двух групп многократных коррелированных измерений с заданным коэффициентом корреляции и отношением стандартных отклонений.

метод Монте-Карло, коэффициент охвата, закон распределения Стьюдента, композиция законов распределения

Введение. Учет корреляции является **актуальной задачей** при обработке результатах многократных измерений [1]. **Целью** настоящее статьи является рассмотрение учета корреляции при обработке результатов косвенных измерений и нескольких групп прямых измерений.

Обработка результатов косвенных многократных измерений. Чаще всего с попарной корреляцией можно встретиться при проведении косвенных многократных измерений. В этом случае нормативный документ [2] рекомендует при обработке применять метод приведения, а руководство [3] учитывает корреляцию в виде дополнительного члена при суммировании дисперсий в соответствии с законом распространения неопределенности:

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2\rho S_1 S_2},$$

где S_1, S_2 – вклады неопределенности первой и второй входной величины; ρ – коэффициент корреляции; S_{Σ} – неопределенность выходной величины.

Однако метод приведения можно осуществить только в том случае, когда количество наблюдений для всех входных величин одинаково, а при нахождении расширенной неопределенности в соответствии с [3] формула Велча-Саттерсвейта не работает [1].

Для нахождения расширенной неопределенности для этого случая методом Монте-Карло осуществлялось моделирование композиции законов распределения Стьюдента для коррелированных с заданным коэффициентом корреляции ρ нормально распределенных величин с известными стандартными отклонениями. Результатом моделирования является зависимость коэффициента охвата получаемой композиции от ρ, числа степеней свободы ν и S_2/S_1. Для $S_2/S_1 = 0,6$ она представлена на рис. 1.

Исследование результата моделирования при изменении S_2/S_1 от 0 до 1 показывает слабую зависимость коэффициента охвата от коэффициента корреляции и хорошую аппроксимацию его коэффициентом Стьюдента для числа степеней свободы ν. Эта закономерность следует из выражения для коэффициента охвата, предложенного в работе [4] при подстановке в него равных степеней свободы ν для любых соотношений S_2/S_1 и значений ρ:

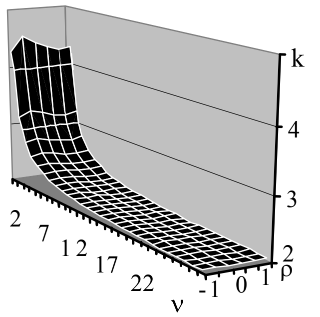

Рис. 1. Анализ k при $S_2/S_1 = 0,6$

$$k = \frac{\sqrt{k_{0,95}^2(\nu_1)S_1^2 + k_{0,95}^2(\nu_2)S_2^2 + k_{0,95}^2 2S_1S_2}}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2}} = k_{0,95},$$

и не следует из формулы Велча-Саттерсвейта:

$$\nu_\Sigma = \left[\sum_{i=1}^{m} S_i^2\right]^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} S_i^4/\nu_i = \nu \left[\sum_{i=1}^{m} S_i^2\right]^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} S_i^4$$

Обработка нескольких групп коррелированных данных. В ряде случаев некоторые из групп данных могут быть попарно коррелированны. Рассмотрим вопрос поиска эффективной оценки в этом случае в виде

$$y = \omega x_1 + (1 - \omega)x_2, \qquad (1)$$

где ω – весовой коэффициент.

Дисперсия выходной величины y при коэффициенте корреляции ρ между x_1 и x_2 будет равна

$$D(y) = \omega^2 D(x_1) + (1-\omega)^2 D(x_2) + 2\rho\omega(1-\omega)\sqrt{D(x_1)D(x_2)}\,.$$

Наиболее эффективная оценка y будет обеспечена для такого ω_{opt} при заданных ρ и $D(x_2)/D(x_1)$, при котором будет достигаться минимум D(y). Используя известную процедуру отыскания минимума функции, получаем условие его достижения:

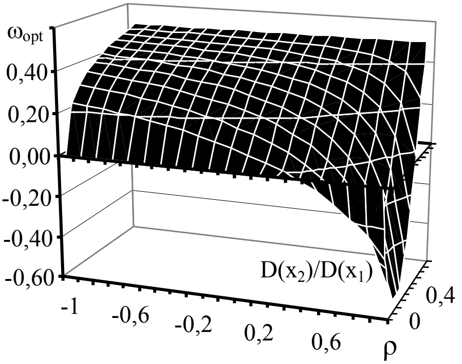

Рис. 2. Зависимость ω_{opt} от ρ и $D(x_2)/D(x_1)$

$$\omega_{opt} = \frac{D(x_2) - \rho\sqrt{D(x_1)D(x_2)}}{D(x_1) + D(x_2) - 2\rho\sqrt{D(x_1)D(x_2)}}. \qquad (2)$$

Зависимость ω_{opt} от ρ и

$D(x_2)/D(x_1)$ приведена на рис. 2.

Из выражения (2) следуют известные формулы для среднего взвешенного при отсутствии корреляции:

$$\omega_{opt} = \frac{D(x_2)}{D(x_1)+D(x_2)} = \frac{1/D(x_1)}{1/D(x_1)+1/D(x_2)}\ .$$

Для любых значений ρ при $D(x_2)/D(x_1) = 1$ (равноточные измерения), получаем $\omega_{opt} = 0{,}5$, т.е. из формулы (2) получаем формулу среднего арифметического.

Для оптимальных значений ω_{opt} относительная эффективность оценки D(y) при учете и не учете корреляции будет равна

$$\frac{D_\rho(y)}{D_0(y)} = \frac{k_{opt}^2 D(x_1)+(1-k_{opt})^2 D(x_2)+2\rho k_{opt}(1-k_{opt})\sqrt{D(x_1)D(x_2)}}{D(x_1)D(x_2)/[D(x_1)+D(x_2)]}\ . \qquad (4)$$

Выводы. 1. Численным моделированием получена композиция двух законов распределения Стьюдента с одинаковым числом степеней свободы ν и отношением СКО S_2/S_1 для произвольного коэффициента корреляции нормально распределенных входных величин. Показано, что коэффициент охвата такой композиции слабо зависит от коэффициента корреляции и хорошо аппроксимируется коэффициентом Стьюдента для числа степеней свободы ν.

2. Получено выражение для эффективной оценки результата измерения нескольких групп коррелированных данных. Определена относительная эффективность получаемой оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров И.П. Оценивание точности измерений: состояние, проблемы, перспективы // АСУ и приборы автоматики. – 2005. – Вып. 131. – С. 176 – 181.*
2. *МИ 2083-90 ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 9 с.*
3. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO, Geneva, First Edition. – 1995. – 101 p.*
4. *Захаров И.П. Композиция законов распределения Стьюдента // Системи обробки інформації. – 2005. – Вып. 8. – С. 28 – 35.*

Поступила 12.10.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор И.В. Руженцев,
Харьковский национальный университет радиоэлектроники.