УДК 519.816

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНЫХ ПРИОРИТЕТОВ ПРИЗНАКОВ ПРИ НЕЧЕТКОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Н.М. Кораблев, А.С. Непокупный, Альзин Фирас
(Харьковский национальный университет радиоэлектроники)

Проведен сравнительный анализ методов наименьших квадратов и собственного вектора, показавший, что для определения абсолютных приоритетов признаков предпочтительно использование метода собственного вектора, который позволяет выполнять согласование и коррекцию экспертных оценок.

сравнительный анализ, абсолютные приоритеты, нечеткая исходная информация

Введение. Проблема принятия решений в условиях нечеткой исходной информации составляет в настоящее время одно из важнейших направлений исследования методов решения слабо структурированных и плохо формализованных задач [1 – 3]. Выбор наилучшего варианта в нечетких задачах усложняется отсутствием формализованной связи между объектами и их признаками, а также недостаточной объективной информацией о количественных значениях исходных данных, часто носящих только качественные оценки. Вследствие этого, недостаток объективной информации восполняется субъективной оценкой характеристик, данной экспертом на основе его опыта, знаний, интуиции. Оценка эксперта всегда связана с неопределенностью в силу своей субъективности, что в дальнейшем влияет на нечеткость выбранного решения.

Исследуемые объекты можно опознавать или различать на основе признаков или факторов. Уровень одних факторов может быть выражен количественно (амперы, миллиамперы, часы, минуты и т.д.), уровень других нельзя точно выразить с помощью числа, они являются качественными. Для учета влияния нечетко описанных исходных данных необходима формализация качественных факторов (целей, ограничений, признаков) с помощью средств математического аппарата. Введение понятия нечетких множеств [4] и соответствующих им функций принадлежности сняло трудности количественного выражения качественных нечетко заданных исходных условий и субъективных суждений при обработке исходной информации. Решение проблемы свелось к построению функции принадлежности нечетким множествам.

Исходными данными задачи являются субъективные экспертные оценки, представленные в виде отношений предпочтения сравниваемых вариантов выбора (альтернатив). Эти оценки могут быть согласованными или несогласованными. В последнем случае необходимо согласовать оценки, иначе это может привести к неточным выводам. Отсутствие же возможности проверки согласованности экспертных оценок и, как следствие, невозможность коррекции исходных данных, могут приводить к серьезным ошибкам при решении задач оптимизации, в частности, задач ранжирования и классификации признаков объектов.

Постановка задачи. Пусть имеется универсальное множество признаков $Y=\{\omega\}$ и нечеткое подмножество признаков $W=\{\omega_i\}, i=\overline{1,n}$ в множестве Y. Тогда степень принадлежности каждого признака ω_i нечеткому множеству W принимает значение функции принадлежности $\mu_W(\omega_i)\in[0,1]$. Следует определить по нечетко описанному признаку ω_i значение функции принадлежности этого признака нечеткому множеству W, т.е. $\mu_W(\omega_i)$, что будет выражать приоритет $PR(\omega_i)$ признака ω_i относительно других признаков, принадлежащих нечеткому множеству W.

При качественном описании признаков эксперт может указать субъективные оценки парного сравнения предпочтительностей i-го и j-го признаков a_{ij}, используя шкалу оценок относительной приоритетности [5]. Оценки отношений предпочтительностей признаков образуют матрицу $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Если сравнение признаков произведено согласованно, то оценки отношений предпочтительностей признаков обладают свойством согласованности $a_{ij}=1/a_{ji}$, так как если i-й признак важнее j-го в a_{ij} раз, то j-й признак важнее i-го в $1/a_{ji}$ раз, и свойством непротиворечивости: $a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}$, так как

$$a_{ik}\cdot a_{kj}=\frac{\cdot\mu_n(\omega_i)}{\cdot\mu_n(\omega_k)}\cdot\frac{\cdot\mu_n(\omega_k)}{\cdot\mu_n(\omega_j)}=\frac{\cdot\mu_n(\omega_i)}{\cdot\mu_n(\omega_j)}=a_{ij},$$

где $\mu_W(\omega_i),\mu_W(\omega_j),\mu_W(\omega_k)$ – функции принадлежности соответствующих признаков множеству W, выражающие степень приоритетности признаков в этом множестве.

При нарушении условия непротиворечивости $a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}$ необходимо определить степень несогласованности оценок эксперта и учесть величину этой несогласованности при коррекции оценок признаков.

Определение значений абсолютных приоритетов. При качественной исходной информации количественные значения приоритетов признаков можно получить, используя результаты субъективных относительных парных сравнений этих признаков по предпочтительности. Наибольшее распространение для нахождения значений коэффициентов предпочтительности признаков при наличии экспертных оценок их парных сравнений получили метод наименьшие квадратов [6] и метод собственного вектора [7]. Проведем сравнительный анализ определения значений функции принадлежности признаков методом наименьших квадратов и методом собственного вектора.

Метод наименьших квадратов. Основная идея метода наименьших квадратов заключается в следующем. Рассматривается сумма квадратов разностей

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_j)}\right)^2, \qquad (1)$$

где a_{ij} – экспертная оценка предпочтительности i -го признака относительно j-го; $\mu_W(\omega_i)$ – оценка i-го признака; $\mu_W(\omega_j)$ – оценка j-го признака.

Чем ближе экспертные оценки отношений предпочтительности признаков a_{ij} к истинным значениям относительных оценок предпочтительности признаков $\dfrac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_j)}$, тем меньше значение S, т.е. при $a_{ij}\to\dfrac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_j)}$, $S\to 0$.

При минимизации функционала S с целью определения $\mu_W(\omega_i)$, учитывая условие $\mu_W(\omega_i)>0$, определяется экстремум функции $\bar{S}$:

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\mu_W(\omega_j)-\mu_W(\omega_i)\right)^2, \qquad (2)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_W(\omega_i)=1, \mu_W(\omega_i)>0. \qquad (3)$$

Для нахождения экстремума функции $\bar{S}=f\left(\mu_W(\omega_i),\ldots,\mu_W(\omega_n)\right)$ методом Лагранжа составляется вспомогательная функция

$$S_\lambda\left(\mu_W(\omega_i),\ldots,\mu_W(\omega_n),\lambda\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\mu_W(\omega_j)-\mu_W(\omega_i)\right)^2+2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_W(\omega_i)-1\right). \qquad (4)$$

Дифференцируя функцию S_λ по переменным $\mu_W(\omega_i),\mu_W(\omega_j)$ и λ и приравнивая производные к нулю, получим систему $(n+1)$ уравнений для определения неизвестных весов $\mu_W(\omega_i)$ в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{im}\mu_W(\omega_m)\right)a_m-\sum_{j=1}^{n}\left(a_{mj}\mu_W(\omega_j)-\mu_W(\omega_m)\right)+\lambda=0,\quad m=\overline{1,n}. \qquad (5)$$

Для сравнительного анализа метода наименьших квадратов с методом собственного вектора рассмотрим матрицу A сравнительных парных оценок приоритетности признаков, данных экспертом, представленную в табл. 1, которая отражает экспертные данные процедуры лечения зубов с помощью электрофореза. Основными признаками (факторами), определяющими процедуру лечения, являются следующие: 1 – «величина тока», 2 – «продолжительность процедуры», 3 – «количество процедур», 4 – «периодичность процедур», 5 – «концентрация раствора».

Таблица 1

Матрица сравнительных парных оценок признаков

	Признак 1	Признак 2	Признак 3	Признак 4	Признак 5
Признак 1	1	0,5	0,25	2	2
Признак 2	2	1	1/3	4	1/3
Признак 3	4	3	1	5	2
Признак 4	0,5	0,25	0,2	1	0,25
Признак 5	0,5	3	0,5	4	1

Каждый элемент матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{5x5}$ выражает субъективную оценку эксперта отношения приоритетности ω_i-го признака по сравнению с приоритетностью ω_j-го признака. Требуется по указанным экспертом относительным значениям $a_{ij}=\dfrac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_j)}$ определить абсолютные оценки приоритетности признаков $\mu_W(\omega_i),\mu_W(\omega_j)$, т.е. определить степени принадлежности признаков нечеткому множеству.

Оценки приоритетности для сравниваемых признаков, представленных в табл. 1, вычисленные методом наименьших квадратов, соответственно равны:

$$\mu_W(\omega_1)\approx 0{,}1086;\quad \mu_W(\omega_2)\approx 0{,}1315;\quad \mu_W(\omega_3)\approx 0{,}4381;$$

$$\mu_W(\omega_4)\approx 0{,}0657;\quad \mu_W(\omega_5)\approx 0{,}2561.$$

Анализ полученных результатов показывает, что первый наивысший ранг имеет признак «продолжительность процедуры», второй ранг – «концентрация раствора», третий ранг – «продолжительность процедуры», четвертый ранг – «величина тока», и последний пятый ранг имеет признак «периодичность процедур».

Недостатком метода наименьших квадратов является то, что с его помощью невозможно выполнить коррекцию полученных оценок с целью улучшения согласованности матрицы. Другим важным недостатком метода наименьших квадратов является его громоздкость. При увеличении числа n сравниваемых признаков требуется программное обеспечение, позволяющее решать систему из $n+1$ уравнений, и на получение результатов затрачивается больше времени, чем при использовании предлагаемого метода нахождения приближенных значений приоритетов признаков объектов.

Метод собственного вектора. Рассмотрим метод собственного вектора для определения приоритетности признаков. Суть этого метода заключается в следующем. Результаты парного сравнения признаков по приоритетности описываются отношениями весов этих признаков.

Матрица A представляет результаты такого парного сравнения: $a_{ij} = \mu_W(\omega_i)/\mu_W(\omega_j)$, при этом элементы матрицы A обладают свойствами согласованности $a_{ij} = 1/a_{ji}$ и непротиворечивости суждений $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$, так как $\dfrac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_j)} = \dfrac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_k)} \cdot \dfrac{\mu_W(\omega_k)}{\mu_W(\omega_j)}$.

В этом случае матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ удовлетворяет уравнению [7]:

$$A\overline{U} = n\overline{U}, \tag{6}$$

где $\overline{U}$ – собственный вектор матрицы A; $n = \lambda$ – собственное значение согласованной матрицы.

Решая матричное уравнение (6), которое сводится к системе линейных уравнений относительно координат собственного вектора $\overline{U}$ [8], находятся веса факторов. Но на практике элементы a_{ij} матрицы A, являющиеся результатами парных сравнений признаков по приоритетности, задаются на основе субъективных оценок эксперта, т.е. весьма неточно. Поэтому в [7] значения компонент собственного вектора находятся из матричного уравнения.

$$A\overline{U} = \lambda_{max}\overline{U}, \tag{7}$$

где λ_{max} – наибольшее собственное значение матрицы A и элементы матрицы подчиняются свойству согласованности $a_{ij} = 1/a_{ji}$, но второе свойство непротиворечивости $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$, необходимое для получения согласованной матрицы A, может не выполняется.

Таким образом, компоненты нормированного собственного вектора согласованной матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ выражают степень приоритетов сравниваемых признаков ω_i во множестве всех признаков.

Традиционный метод нахождения компонент собственного вектора $\overline{U} = (\mu_W(\omega_1),...,\mu_W(\omega_n))$ матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ заключается в следующем. Матричное уравнение $AU = \lambda U$ умножают на единичную матрицу $(I)_{n \times n}$ "слева" и приводят к эквивалентному уравнению:

$$(A - \lambda I)U = 0. \tag{8}$$

Для существования ненулевого собственного вектора $\overline{U}$ матрица $(A - \lambda I)$ должна быть вырожденной [8]. Поэтому для нахождения λ, соответствующего ненулевому собственному вектору $\overline{U}$, определитель матрицы $(A - \lambda I)$ приравнивают к нулю: $\det(A - \lambda I) = 0$. Так как матрица A – согласованная, то ее собственное значение λ известно: $\lambda = n$, в противном случае, что чаще всего бывает при субъективном сравнении, матрица A оказывается несогласованной. Тогда собственные значения λ находятся из решения характеристического уравнения n-го порядка относительно λ [8]:

$$\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + ... - C_n = 0, \tag{9}$$

имеющего n корней: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Для найденного значения λ_i решается матричное уравнение (8) относительно компонент собственного вектора $\overline{U}$ матрицы A. Уравнение (8) представляется в виде системы n уравнений с n неизвестными компонентами собственного нормированного вектора

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\mu_W(\omega_1) + a_{12}\mu_W(\omega_2) + ... + a_{1n}\mu_W(\omega_n) = 0; \\ a_{21}\mu_W(\omega_1) + (a_{22} - \lambda_2)\mu_W(\omega_2) + ... + a_{2n}\mu_W(\omega_n) = 0; \\ \vdots \\ a_{n1}\mu_W(\omega_1) + a_{n2}\mu_W(\omega_2) + ... + (a_{nn} - \lambda_n)\mu_W(\omega_n) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

при условии нормирования вектора $\overline{U}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_W(\omega_i) = 1. \tag{11}$$

Однородная система (10), определитель которой равен нулю, имеет бесчисленное множество решений, единственность решения обеспечит условие нормирования собственного вектора (11). В результате компоненты собственного нормированного вектора, соответствующие собственному значению $\lambda = \lambda_i$, будут однозначно определены: $\overline{U} = (\mu_W(\omega_1),...,\mu_W(\omega_n))$.

Однако при решении практических задач при составлении матрицы отношений приоритетности признаков $A^* = (a_{ij})_{n \times n}$ условия согласованности нарушаются. Тогда свойство, справедливое для согласованной матрицы А, не выполняется для матрицы A^*, составленной экспертом, т.е. наибольшее $\lambda_{max} \neq n$. Но матрица A^*, предложенная экспертом, будет тем ближе к согласованной, чем ближе λ_{max} к n. Поэтому для нахождения компонент нормированного собственного вектора $\overline{U} = (\mu_W(\omega_1),...,\mu_W(\omega_n))$ решается матричное уравнение вида:

$$A^* \cdot \overline{U} = \lambda_{max} \overline{U}, \qquad (12)$$

Для нахождения λ_{max} составляется характеристическое уравнение (9) n-й степени относительно λ. Найденное наибольшее значение λ_{max}, близкое к n, рассматривается как собственное значение матрицы A^*, близкой к согласованной. Подставляя это значение λ_{max} в систему уравнений (10), находят компоненты нормированного собственного вектора $\overline{U} = (\mu_W(\omega_1),...,\mu_W(\omega_n))$, определяющие значения функции принадлежности признаков ω_i множеству W [5, 7].

Приближенный метод. Характеристическое уравнение (9) четной степени может, в общем случае, не иметь действительных корней, так как все корни могут оказаться попарно комплексно-сопряженными. Для разрешения этой проблемы предлагается использовать один из приближенных способов нахождения компонент собственного нормированного вектора матрицы A^*, элементы которой обладают только условием согласованности $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Это условие для эксперта при составлении матрицы оценок отношений приоритетности признаков сохранять несложно.

Суть способа заключается в следующем. Пусть экспертом составлена матрица $A^* = (a_{ij})_{n \times n}$, элементы которой выражают отношения приоритетов признаков $\mu_W(\omega_i)$, при этом оценки эксперта согласованы, т.е. $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Требуется найти значения степеней приоритетов признаков $\mu_W(\omega_i)$, которые являются компонентами нормированного собственного вектора $\overline{U} = (\mu_W(\omega_1),...,\mu_W(\omega_n))$, с учетом выполнения условия нормирования (11).

Для нахождения компонент собственного вектора матрицы A^* проведем следующие операции. Представим в матрице A^* оценки отношений приоритетности признаков a_{ij} в виде отношений значений функций принадлежности признаков: $a_{ij}=\frac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_j)}$. Элементы каждой строки матрицы A^* перемножаются и извлекается корень n-й степени, результат делится на сумму полученных корней n-й степени по всем строкам, чтобы обеспечить нормирование собственного вектора Полученная величина определяет значение функции принадлежности соответствующего признака. Покажем нахождение компоненты нормированного собственного вектора для i-й строки:

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}}}=\frac{\sqrt[n]{\frac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_1)}\cdot\frac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_W(\omega_i)}{\mu_W(\omega_n)}}}{\sqrt[n]{\frac{\mu_W(\omega_1)}{\mu_W(\omega_1)}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_W(\omega_1)}{\mu_W(\omega_n)}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{\mu_W(\omega_n)}{\mu_W(\omega_1)}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_W(\omega_n)}{\mu_W(\omega_n)}}}=$$

$$=\frac{\mu_W(\omega_i)}{\sqrt[n]{\mu_W(\omega_1)\cdot\ldots\cdot\mu_W(\omega_n)}\cdot\frac{\mu_W(\omega_1)+\ldots+\mu_W(\omega_n)}{\sqrt[n]{\mu_W(\omega_1)\cdot\ldots\cdot\mu_W(\omega_n)}}}=\mu_W(\omega_i),$$

так как $\sum_{i=1}^{n}\mu_W(\omega_i)=1$ по условию нормирования собственного вектора.

Таким образом, учитывая, что компоненты нормированного вектора $\mu_W(\omega_i)$ выражают значения функции принадлежности признака нечеткому множеству признаков $W=\{\omega_i\}$, получим формулу для нахождения значений функции принадлежности признаков:

$$\mu_W(\omega_i)=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}}\Bigg/\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}}\ ,\qquad(13)$$

где a_{ij} – оценка парных отношений приоритетов признаков.

Степень предпочтительности признака во множестве признаков можно рассматривать как приоритет этого признака относительно других признаков, следовательно, формула (13) будет справедлива для нахождения приоритетов признаков при субъективном оценивании отношений приоритетов признаков [7]:

$$PR_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}}\Bigg/\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}}\ .\qquad(14)$$

Полученные методом собственного вектора соответствующие значения приоритетов признаков для рассматриваемого примера равны:

$$\mu_W(\omega_1) \approx 0{,}144; \quad \mu_W(\omega_2) \approx 0{,}161; \quad \mu_W(\omega_3) \approx 0{,}430;$$

$$\mu_W(\omega_4) \approx 0{,}059; \quad \mu_W(\omega_5) \approx 0{,}206.$$

Видно, что значения, найденные методом собственного вектора, практически совпадают с результатами, полученными методом наименьших квадратов. Но в отличие от метода наименьших квадратов метод собственного вектора позволяет провести проверку согласованности экспертных оценок [7] и выполнить коррекцию исходных сравнительных оценок предпочтительности признаков объектов.

Выводы. Проведенный сравнительный анализ методов определения абсолютных приоритетов признаков при нечеткой исходной информации показал, что наиболее приемлемым для этих целей является использование метода собственного вектора с приближенной оценкой значений функции принадлежности признаков, являющихся приоритетами признаков при их субъективном относительном экспертном оценивании. Использование этого метода позволяет решать задачи согласования исходных экспертных оценок и осуществлять их коррекцию с целью улучшения нечеткого вывода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Интеллектуальные информационные системы. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 424 с.*
2. *Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 320 с.*
3. *Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2002. – 215 с.*
4. *Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 168 с.*
5. *Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 315 с.*
6. *Chu A., Kalaba R., Springam R. // J. of Optimization theory and applications. – 1979. – Vol. 27. – № 4. – P. 531 – 533.*
7. *Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.*
8. *Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.*

Поступила 4.11.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор Г.Ф. Кривуля, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.