

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ЖЕСТКОГО КОЛЬЦА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

д.т.н. В.И Холявко, к.т.н. А.Ю.Печунов, В.В. Чмовж

В данной статье рассмотрено математическое моделирование обтекания кругового кольца потенциальным потоком невязкой жидкости, направленному по нормали к плоскости кольца. Получены значения гидродинамических параметров, определена присоединенная масса кольца.

1. Поместим в поток невязкой жидкости непроницаемое жесткое кольцо. Скорость невозмущенного потока равна  $V_\infty$  и направлена по оси симметрии (Рис.1).

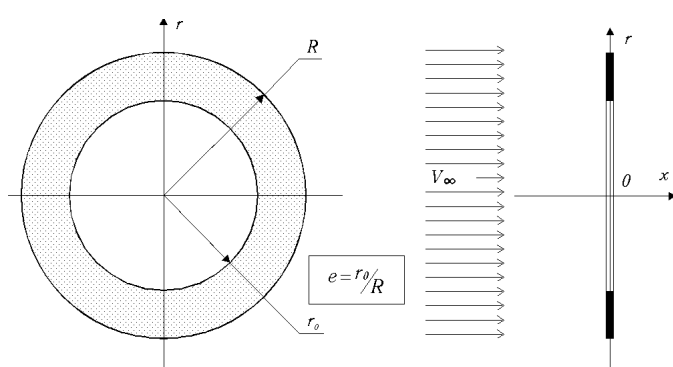


Рис.1. Кольцо в потоке

Течение принимается потенциальным и установившимся. Так как течение обладает осевой симметрией, то все характеристики потока будут зависеть только от двух координат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{r}$  в цилиндрической системе координат. Обозначим потенциал скоростей через  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ .

Эта функция должна удовлетворять уравнению Лапласа во всем поле течения вне поверхности кольца  $S$ . Учитывая линейность уравнения Лапласа, удобно представить потенциал скоростей в виде двух слагаемых

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \Phi_\infty(\mathbf{x}) + \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}), \quad (1.1)$$

где  $\Phi_\infty(\mathbf{x}) = V_\infty \cdot \mathbf{x}$  - функция течения невозмущенного потока, а

$\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  - характеристика дополнительного течения, вызванного присутствием в потоке кольца; эта функция описывает течение, которое возникает в покоящейся среде при движении кольца со скоростью -  $V_\infty$ .

Для определения функции  $\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  имеем краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = 0, & (\mathbf{x}, \mathbf{r} \in \Omega) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}} = -V_\infty, & (\mathbf{x}, \mathbf{r} \in C) \\ \nabla\varphi_1 = 0, & (|\mathbf{x}|, \mathbf{r} \in \infty) \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение краевой задачи (1.2) проводится методом особенностей. Целесообразно воспользоваться вихревыми кольцами, распределенными по поверхности кольца. Из граничного условия на кольце приходим к интегральному уравнению.

2. Пусть по поверхности жесткого кольца непрерывно распределены вихревые кольца с погонной циркуляцией равной  $\gamma(\mathbf{S})$ , так что

$$d\Gamma = \gamma(\mathbf{S})d\mathbf{S}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{S}$  - линейная координата, отсчитываемая от внутреннего края кольца  $r_0 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{R}$ .

Если воспользоваться граничным условием краевой задачи (1.2) и соотношениями для скоростей, индуцируемых вихревым кольцом / [1]÷[3] /, то получаем следующее интегральное уравнение для неизвестной функции  $\gamma(\mathbf{S})$

$$\int_{r_0}^{\mathbf{R}} \gamma(\mathbf{S}) \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, \mathbf{S}) d\mathbf{S} = 2\pi V_\infty, \quad (2.2)$$

где ядро интегрального уравнения  $\tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, \mathbf{S})$  определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = \frac{1}{\mathbf{r} + \mathbf{S}} \left[ \mathbf{K}(\mathbf{k}) - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{S}}{\mathbf{r} - \mathbf{S}} \mathbf{E}(\mathbf{k}) \right]. \quad (2.3)$$

Здесь  $\mathbf{K}(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  - полные эллиптические интегралы I-го и II-го рода с модулем  $\mathbf{k} = 2\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}} / (\mathbf{r} + \mathbf{S})$ . Интегральное уравнение (2.2) является сингулярным.

После решения интегрального уравнения (2.2) характеристики течения определяются следующим образом. Скорости на поверхности кольца вычисляются по формуле

$$\mathbf{Vr}(\mathbf{S}) = \pm \frac{1}{2} \gamma(\mathbf{S}), \quad (2.4)$$

где знак "плюс" относится к наветренной стороне кольца, а "минус" - к подветренной.

Согласно уравнению Бернулли коэффициент давления  $C_p$  определяется

$$C_p(\mathbf{r}) = \frac{P - P_\infty}{\rho V_\infty^2 / 2} = 1 - \left[ \frac{\mathbf{Vr}(\mathbf{S})}{V_\infty} \right]^2 = 1 - \frac{1}{4} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{S})}{V_\infty} \right]^2. \quad (2.5)$$

Для вычисления присоединенной массы жесткого кольца при его движении вдоль отрицательного направления оси  $Ox$  с единичной скоростью  $V_\infty = 1$  (4) получаем формулу

$$\mathbf{m} = -\rho \int_{C=C_+C_-} \varphi_1^\circ \frac{\partial \varphi_1^\circ}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 2\pi\rho \int_R^{r_0} r \left[ \int_r^{r_0} \gamma^\circ(\mathbf{S}) \right] dr, \quad (2.6)$$

где интегрирование ведется по всей поверхности кольца  $C$ , включая наветренную  $C_-$  и подветренную  $C_+$  стороны.

Представляет интерес сравнить формулу (2.6) с приближенным решением, полученным по методу плоских сечений [5]. Применительно к кольцу, значение присоединенной массы вычисляется по формуле

$$\mathbf{m} = \rho \frac{\pi^2}{4} R^3 (1 - e)^2 (1 + e). \quad (2.7)$$

3. Решение интегрального уравнения (2.2) может быть получено только приближенно с использованием численных методов. Целесообразно перейти к безразмерным величинам - все линейные размеры выразить в долях внешнего радиуса кольца  $R$ , погонную циркуляцию отнести к величине скорости набегающего потока  $V_\infty$ , а полную циркуляцию - к величине произведения  $V_\infty R$ .

Разделим всю высоту кольца ( $e \leq r_\beta \leq 1$ ) на  $n$  равных участков с шагом  $1/n$ . На каждом из участков заменим непрерывный вихревой слой дискретными вихрями

$$\gamma(\mathbf{S})d\mathbf{S} \approx \Delta\Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

сосредоточив их в точках  $\mathbf{r}_{\beta i}$ , лежащих посередине каждого участка. Граничное условие на поверхности кольца будет выполняться в точках  $\mathbf{r}_j$ , совпадающих с верхними концами каждого из участков, исключая крайнюю точку, совпадающую с краем кольца. Так как граничные точки располагаются посередине между соседними вихрями, то суммы, которыми заменяются несобственные интегралы в уравнении (2.2) при переходе от непрерывного распределения вихревого слоя к дискретным вихрям, в пределе при  $n \rightarrow \infty$  дадут главные значения интегралов в смысле Коши [2] с учетом особенностей на краях кольца.

Система алгебраических уравнений, заменяющая уравнение (2.2), записывается в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \Delta\Gamma_i \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{\beta i}) = 2\pi, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \sum_{i=1}^n \Delta\Gamma_i = 0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{\beta i}) = \frac{1}{r_j + r_{\beta i}} \left[ \mathbf{K}(k_{ij}) - \frac{r_j + r_{\beta i}}{r_j - r_{\beta i}} \mathbf{E}(k_{ij}) \right], \quad k_{ij}^2 = \frac{4 \cdot r_j \cdot r_{\beta i}}{(r_j + r_{\beta i})^2}.$$

Второе соотношение в системе уравнений (3.2) вводится для замыкания системы уравнений и соответствует равенству нулю суммарной циркуляции по контуру, охватывающему ширину кольца. В случае сплошного диска

( $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ) для замыкания системы вместо условия  $\sum_{i=1}^n \Delta\Gamma_i = 0$  вводится

условие непротекания в центре диска  $\sum_{i=1}^n \frac{\Delta\Gamma_i}{r_{\beta i}} = 2$ .

Система уравнений (3.2) является замкнутой и содержит  $n$  уравнений для определения  $n$  неизвестных  $\Delta\Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Для вычисления полных эллиптических интегралов  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{E}$  удобно пользоваться зависимостями, предложенными в [6].

Очевидно, на точность решения задачи обтекания влияет выбор числа дискретных вихрей  $\mathbf{n}$  или количество уравнений, входящих в систему уравнений. В общем случае получить строгое доказательство сходимости численного решения к точному при  $\mathbf{n} \rightarrow \infty$  не представляется возможным. Поэтому при работе с аналогичными системами ограничиваются анализом практической сходимости путем сопоставления решений при разных, возрастающих значениях  $\mathbf{n}$ .

После того, как из системы уравнений (3.2) определены значения  $\Delta\Gamma_i$ , вычисляются гидродинамические параметры обтекания по формулам п.2. Запишем эти формулы в виде, удобном для численного решения задачи. Распределение скоростей по поверхности кольца целесообразно вычислять в точках расположения дискретных вихревых колец  $\mathbf{r}_{\beta i}$ . Определим предварительно значение погонной циркуляции  $\gamma_i$  в точке  $\mathbf{i}$ . Так как

$$\gamma_i dS \approx \Delta\Gamma_i, \text{ а } dS \approx \frac{1-e}{\mathbf{n}}, \text{ то } \gamma_i = \frac{\Delta\Gamma_i}{1-e} \cdot \mathbf{n}.$$

Формула для вычисления скорости на поверхности кольца в точке  $\mathbf{c}$  принимает вид

$$\bar{\mathbf{V}}_{ri} = \mathbf{V}_{ri} / \mathbf{V}_{\infty} = \pm \frac{1}{2} \gamma_i \approx \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\Gamma_i}{1-e} \cdot \mathbf{n} \quad (3.3)$$

Давление в точках  $\mathbf{i}$  поверхности оболочки вычисляется следующим образом

$$C_{p_i} = 1 - \left[ \mathbf{V}_{ri} / \mathbf{V}_{\infty} \right]^2 = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta\Gamma_i}{1-e} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \quad (3.4)$$

Чтобы определить присоединенную массу кольца воспользуемся формулой (2.6) и введем обозначение  $\mathbf{m}_* = \frac{\mathbf{m}}{\rho R^3}$ , тогда

$$\mathbf{m}_* = \frac{\mathbf{m}}{\rho R^3} = 2\pi \frac{1-e}{\mathbf{n}} \sum_{i=n}^1 \left( \sum_{p=n}^i \Delta\Gamma_p \right) \mathbf{r}_{\beta i}. \quad (3.5)$$

4. Для иллюстрации изложенной выше методики приводятся результаты расчета обтекания кольца. На рис. 2. показаны основные гидродинамические характеристики для кольца  $\mathbf{e} = \mathbf{0.2}$ . В Табл. 1. и на рис. 3. пред-

ставлены значения присоединенной массы кольца в зависимости от отношения внутреннего радиуса к внешнему.

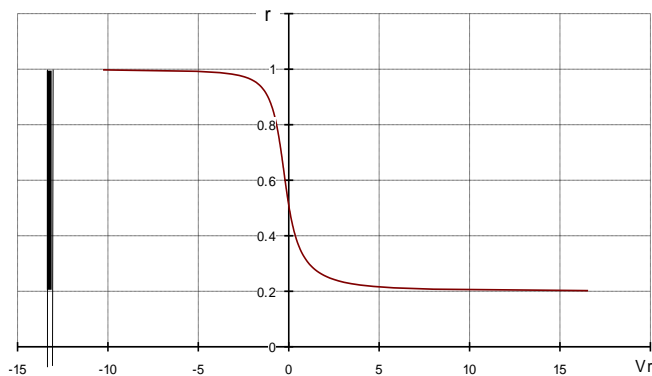


Рис.2.а. Распределение относительной величины модуля скорости  $\bar{V}r$

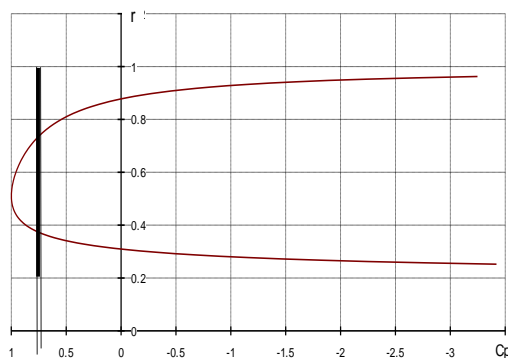


Рис. 2.б. Распределение коэффициента давления  $Cp$ .

$e$	по формуле (3.5)	метод плоских сечений
0.0	2.66951	точное значение $8/3$
0.1	2.33009	2.19845
0.2	1.97753	1.89496
0.3	1.62011	1.57173
0.4	1.26923	1.24357
0.5	0.93683	0.92528
0.6	0.63530	0.63165
0.7	0.37746	0.37751
0.8	0.17651	0.17765
0.9	0.04602	0.04688

Табл. 1.

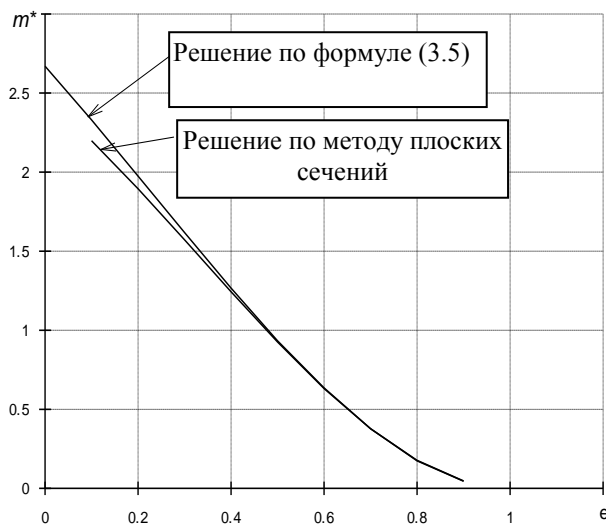


Рис.3. Присоединенная масса кольца

Как показывают расчеты с точностью до 2% оценка присоединенной массы кольца может осуществляться по методу плоских сечений для  $e > 0.4$ .

5. Если известна присоединенная масса кольца в безграничной жидкости, то пользуясь приближенным методом [5], можно оценить влияние границ потока.

а) Вертикальный удар по кольцу, плавающему по поверхности жидкости конечной глубины  $h$  с плоским дном. Общее выражение для присоединенной массы имеет вид

$$m^* = \frac{m}{m^\infty} = \frac{1 + 3\zeta(3)z}{1 - 3\zeta(3)w}, \quad z = \frac{(m^\infty + pV)V}{32\pi \cdot m^\infty h^3}, \quad w = \frac{m^\infty + pV}{32\pi \cdot p \cdot h^3}, \quad (5.1)$$

где  $m$  и  $m^\infty$  - присоединенные массы тела в ограниченной и безграничной жидкости,  $h$  - расстояние от дна до поверхности жидкости,  $V$  - объем тела,  $\zeta(3)$  - дзета - функция Римана,  $\zeta(3) = 1,202$ .

Для кольца объем тела  $V=0$ , при этом формула (5.1) записывается как

$$m^* = \frac{1}{1 - 3\zeta(3) \cdot m^\infty / 32\pi \cdot p \cdot h^3} \approx \left[ 1 - \frac{3.606}{32\pi} \cdot \frac{m^\infty}{p \cdot h^3} \right]^{-1}. \quad (5.2)$$

Подставляя в формулу (5.2) вычисленные значения присоединенной массы кольца в безграничной жидкости  $m^\infty = m_* p R^3$ , находим приращение присоединенной массы, обусловленное влиянием границы. Нетрудно заметить, что это влияние незначительное и уменьшается с увеличением параметра  $e = r_0/R$ .

Для случая сплошного диска  $e = 0$ ,  $m^\infty = 8/3 p R^3$  имеем

$$m^* = \left[ 1 - 0.096 \left( \frac{R}{h} \right)^3 \right]^{-1} \approx 1 + 0.096 \left( \frac{R}{h} \right)^3 \quad (5.3)$$

последнее равенство получено из выражения  $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$  при  $x \ll 1$ .

б) Присоединенная масса кольца при вертикальном ударе о жидкость, заполняющей полусферический сосуд. Согласно [5] формула для расчета присоединенной массы для случая, когда ось кольца совпадает с осью вращения сосуда радиуса  $a$ , имеет вид

$$m^* = \frac{1 + P}{1 - q}, \quad P = \frac{(m^\infty + pV)V}{2\pi \cdot m^\infty a^3}, \quad q = \frac{m^\infty + pV}{2\pi \cdot p \cdot a^3}. \quad (5.4)$$

Для кольца  $V=0$  формула (5.4) принимает вид

$$m^* = \left[ 1 - \frac{m_\infty}{2\pi \cdot \rho \cdot a^3} \right]^{-1}. \quad (5.5)$$

Для сплошного диска из формулы (5.5) получаем

$$m^* = \left[ 1 - 0.424 \left( \frac{R}{a} \right)^3 \right]^{-1}. \quad (5.6)$$

Сравнивая два выражения (5.2) и (5.5), а также (5.3) и (5.6) можно заметить, что во втором случае (кольцо в полусферической области течения) влияние внешней границы на присоединенную массу сказывается в большей степени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кюхеман Д., Вебер И. Аэродинамика авиационных двигателей. М.: И. Л., 1956.
  2. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. Наука, 1965.
  3. Патрашев А.Н., Кивяко Л.А., Гожий С.И. Прикладная гидродинамика. М., 1970.
  4. Кочин. Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. ч.1. М.: ГИТТЛ, 1955.
  5. Холякко В.И. Гидродинамика тела в ограниченном потоке жидкости. Харьков: ХАИ, 1980.
  6. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке БЕЙСИК для персональных ЭВМ. М.: Наука, 1989.
-