

## ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ

С. С. Зубатый, В. И. Лавинский

Работа посвящена решению задачи контактного взаимодействия двух тел и проблемам, создания программного обеспечения для ее решения.

Передача усилия в машинах и механизмах происходит посредством локального контакта рабочих поверхностей. Однако при исследовании напряженно - деформированного состояния взаимодействующих тел непосредственно в зоне контакта возникают явления, которыми зачастую пренебрегают, справедливо опираясь на известный принцип Сен-Венана. В большинстве же реальных конструкций (зубчатые зацепления, подшипники, фланцевые соединения и т.д.) возникает необходимость оценить величины и закон распределения истинных контактных в локальной зоне контакта. Невозможность адекватного использования классической теории упругости требует создания соответствующего математического аппарата и программного обеспечения. Дифференциальные операторы, описывающие эту упругопластическую контактную задачу, в общем случае нелинейные и зависят от факторов, связанных с неупругим поведением материала в рассматриваемых подобластях и различными условиями взаимодействия на контактных площадках. К последним относятся: изменение границ участков соприкосновения в процессе деформирования, взаимное проскальзывание контактирующих тел в тангенциальном направлении и наличие трения.

В данной работе решение задачи получено путем последовательного рассмотрения ряда смешанных задач в инерционном процессе, на каждом шаге которого границы контактных площадок, условия взаимодействия на них полагаются фиксированными и учитываются в соответствии с выполнением условий:

$$(\mathbf{u}_n^{m-1} + \mathbf{u}_n^{m+1} - \delta_{on}^m) \sigma_{nn}^m = \mathbf{0}; \quad (1)$$

$$|\sigma_{n\tau}| \leq f \mu \sigma_{nn}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{nt}$  - нормальные и касательные напряжения в точке контакта;

$u_n$ ,  $\sigma_{on}$  - нормальное перемещение точки контакта и начальный зазор (натяг) в направлении общей нормали к контактирующим поверхностям;

$m-1$ ,  $m+1$ ,  $m$  - соответственно, индексы, определяющие принадлежность точки каждой из контактирующих подобластей и контактного слоя.

Между взаимодействующими подобластями  $V^{m-1}$ ,  $V^{m+1}$  в пределах возможной области контакта вводится специальный слой  $V^m$ , наделенный особыми свойствами. Например, при рассмотрении нормального взаимодействия без трения назначаются лишь параметры упругости материала "контактного" слоя, отвечающие за деформацию в направлении общей нормали к поверхности раздела тел. Остальные упругие постоянные принимаются малыми или равными нулю. В этом случае передача усилия от тела к телу осуществляется "контактными" элементами подобно основанию Винклера. Эта модель является наиболее распространенной при решении контактных задач и в большинстве случаев правильно отражает характер взаимодействия тел друг с другом [1]. Указанный прием позволяет внешнюю нелинейность, обусловленную граничными условиями (1, 2), свести к внутренней нелинейности "контактного" слоя и перейти к рассмотрению задачи взаимодействия упругих или упруго-пластических тел, разделенных нелинейным слоем.

Учет трения при решении контактной задачи производится с помощью зависимости Кулона (2) по известному из предыдущей итерации распределению нормальных давлений в зоне контакта. В случае, если касательное напряжение  $\sigma_{nt}$  в рассматриваемой точке превосходит значение нормальной компоненты  $\sigma_{nn}$ , умноженной на коэффициент трения  $f_{тр}$ , разрешается взаимное смещение контактирующих поверхностей, а действие силы трения заменяет касательными напряжениями, противодействующими проскальзыванию. Работа последних на соответствующих перемещениях подсчитывается путем интегрирования по поверхности контактной площадки.

Решение краевой задачи осуществляется методом конечных элементов (МКЭ) в перемещениях, с использованием вариационного управления Лагранжа

$$\delta (\Pi - A v - A \pi) = 0, \quad (3)$$

где  $\Pi$  - потенциальная энергия деформации упругой системы;

$A_v, A_p$  - соответственно, работа объемных и поверхностных сил.

В качестве базового применяется изопараметрический восьмиузловой призматический конечный элемент с билинейной аппроксимацией перемещений внутри элемента. Выбор данного конечного элемента имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными кубическими элементами при описании геометрии области, границы которой имеют участки, образующие малые углы с осями координат.

Алгоритм решения задачи предусматривает последовательное разбиение области на составляющие ее конечные элементы. Вначале рассматриваемый объект представляется совокупностью восьмиузловых призматических подобластей, ребра которых образуют топологически регулярную сетку. Ребра подобластей могут представлять собой отрезки прямых или дуги окружностей. Вторичная дискретизация подобластей на конечные элементы производится автоматически, по информации о числе дробления ребер начальных призм и степени неравномерности этого дробления. Стороны в виде дуг окружностей при этом задаются ломаными. Характер сгущения или разрежения вторичной разбивки определяется законом геометрической прогрессии. Описанный способ представления исходной информации позволяет существенно автоматизировать этап задания геометрии конструкции и обеспечивает достижение минимальной ширины ленты матрицы жесткости.

Для рассматриваемого класса задач характерно существование нелинейности трех типов, обусловленных неупругим поведением материала конструкции, изменением границ контактных площадок и условиями трения взаимодействия. Одной из основных особенностей предлагаемого алгоритма решение поставленной задачи является учет всех указанных типов нелинейности в рамках единой итерационной схемы метода переменных параметров упругости

$$[A^{N-1}(\beta)]\{u\}^N = \{B\}^{N-1}, \quad (4)$$

где  $[A]$  - матрица жесткости системы;

$\beta$  - некоторый параметр, определяющий нелинейность процесса;

$\{u\}$  - вектор-столбец узловых перемещений;

$\{B\}$  - вектор-столбец правых частей;

$N$  - номер итерации.

В точках, где обнаружена пластическая деформация, упругие свойства изотропного материала пересчитываются согласно теории малых

упругопластических деформаций [2]. Следует отметить, что зоны пластичности, контакта - отрыва и проскальзывания определяются с точностью до размеров конечного элемента.

Такой подход обеспечивает достаточно быструю сходимость обоих процессов и обычно требует выполнения не более пяти - семи итераций. При этом нет необходимости запоминать решения предыдущего шага, что упрощает алгоритм и приводит к экономии памяти.

На основе описанной методики создан программный комплекс FEM - 3DZ, позволяющий решать задачи контактного взаимодействия. Тестирование программного комплекса на серии примеров показало удовлетворительное совпадение результатов. В настоящее время программный комплекс применяется для анализа напряженно - деформированного состояния новых конструкций многопараметрических зубчатых передач и вариантов скорости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. - М. - Л.: Гостехиздат, 1949. - 270 с.

2. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. - Киев: Наукова думка, 1981. - 369 с.

---