УДК 621.395.2.019.3

ОСОБЕННОСТИ ДУАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДВУХПОЛЮСНЫХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ МУРА - ШЕННОНА

к.т.н., доц. В. Г. Стадченко, М. Ю. Кузнецова

В статье дается краткий анализ специфики использования метода последовательного разложения исходной инфраструктуры исследуемой системы относительно особого элемента для расчета ее структурнонадежностных характеристик, приводится обоснование ограниченной неорсетями области приложения метода.

В условиях бурного развития теории сетей вопросы анализа структурной надежности сложных распределенных систем были и остаются актуальными задачами проектирования перспективных и модернизации существующих объектов с сетевой (графовой) топологией.

При рассмотрении надежности таких объектов понятие надежности, как правило, относят не ко всей сети в целом, а к простой цепи (ПЦ), не содержащей одноименных вершин, а значит петель и циклов, или совокупности таких цепей между заданной парой узлов объекта. Таким образом, рассматривают надежность связности двух полюсов сети при известных надежностных показателях ребер и узлов, входящих в связывающие их цепи, или, другими словами, структурную надежность двухполюсной сети [1]. Показателем количественной оценки этой характеристики является вероятность связности заданных истока и стока двухполюсной сети за время **t**.

Для решения задачи оценки структурной надежности таких сетей наиболее часто используются метод свертки по классическим последовательной и параллельной схемам, а также их комбинациям [1, 2]. Достоинствами данного метода являются его точность, простота и невысокая вычислительная сложность. Однако, как известно, он не универсален, поскольку неприемлем для мостиковых схем, когда структура сети содержит ребра - перемычки (мостиковые соединения, мосты, особые элементы) между непересекающимися ПЦ подграфа структуры, и нельзя выделить последовательные и параллельные участки сети с последующим их объединением. Для решения задачи оценки структурной надежности подобных схем используется ряд приближенных методов, таких как метод преобразования треугольника в звезду и обратно, метод исключения элементов, метод путей и сечений и другие [2]. Их недостаток - высокая погрешность, имеющая место при наличии определенных особенностей исходной задачи (высокие значения вероятностей, характеризующих надежность элементов схемы, большое число исключаемых элементов, их неверный выбор и ряд других). Известен также класс точных методов решения поставленной задачи. Характерным представителям данной группы методов являются метод полного перебора состояний элементов двухполюсной сети [1]. К сожалению, для решения практических задач большой размерности он непригоден, поскольку его вычислительная сложность определяется экспонентой $\mathbf{2^n}$, где $\mathbf{n}$ - число элементов сети. Отдельно в классе точных методов следует отметить метод прямого перебора ПЦ (метод оценки сетевой структурной надежности по совокупности путей), подробно описанный в [1]. Его трудоемкость также экспоненциальна $\mathbf{2^{m_{x,y}}-1}$, где $\mathbf{m_{x,y}}$ - число ПЦ из истока $\mathbf{x}$ сети в сток $\mathbf{y}$, однако, учитывая наглядность, именно данный подход рекомендуется специалистам в качестве эталонного метода, позволяющего получать точные значения искомой вероятности связности (структурной надежности) $\mathbf{P_{x,y}(t)}$ между заданными полюсами сети хотя бы на маломощных структурах. Существо метода сводится к формированию всех возможных комбинаций из $\mathbf{m_{x,y}}$ ПЦ по $\mathbf{1,2,...,m_{x,y}}$ (множества сочетаний $\left\{\mathbf{C^i_{m_{x,y}}}\right\}$, $\mathbf{i = \overline{1, m_{x,y}}}$). Каждая комбинация есть дизъюнктивное объединение элементов входящих в нее ПЦ, т.е. некая совокупная ПЦ (СПЦ), состоящая из элементов графа, присутствующих хотя бы в одной из объединяемых ПЦ. Результирующее выражение для $\mathbf{P_{x,y}(t)}$ определяется знакопеременной суммой, каждое слагаемое которой представляет собой произведение значений надежности элементов соответствующей СПЦ.

Среди точных методов оценки структурной надежности двухполюсных сетей особое место занимает метод разложения булевой функции относительно особого элемента (метод последовательного разложения исходной структуры относительно мостикового соединения), известный как метод Мура - Шеннона [1]. Его преимущество перед вышеизложенными методами данного класса определяется значительно меньшими трудозатратами, оцениваемыми как $\mathbf{2^{k_{x,y}}}$, где $\mathbf{k_{x,y}}$ - количество уровней разложения сети, равное, в общем случае, числу элементов разложения (ЭР), т.е. мостиковых соединений (МС). Для сравнения необходимо заметить, что уже для простейших мостиковых схем число их ПЦ $\mathbf{m_{x,y}=2^{k_{x,y}+1}}$, а значит сложность решения данной задачи методом прямого перебора ПЦ составит $\mathbf{2^{2^{k_{x,y}+1}}-1}$, что в реальных условиях неприемлемо. Для любых мостиковых схем число МС $\mathbf{k_{x,y} \le n-4}$, следовательно метод полного перебора состояний элементов сети также уступает рассматриваемому по трудоемкости. Основная идея метода Мура - Шеннона состоит в следующем. Искомое значение $\mathbf{P_{1,4}(t)}$ для структуры, представленной рис.1, включающей МС $\mathbf{b_{23}}$ (или $\mathbf{b_{32}}$) с надежностью $\mathbf{p_{23}(t)}$ (для упрощения расчетов надежность узлов сети принимается равной 1), равна

$$\mathbf{P_{1,4}(t) = p_{23}(t) \bullet P_{14}(t)\Big|_{p_{23}(t)=1} + [1 - p_{23}(t)] \bullet P_{14}(t)\Big|_{p_{23}(t)=0}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{P_{14}(t)\Big|_{p_{23}(t)=1}}$ - надежность связности вершины 1 сети с вершиной 4 (надежность совокупности всех ПЦ из узла 1 в 4) при условном предположении о том, что надежность моста равна 1, что эквивалентно стягиванию (слиянию) узлов 2 и 3 по ребру $\mathbf{b_{23}}$, рис.2;

$\mathbf{P_{14}(t)\Big|_{p_{23}(t)=0}}$ - та же надежность , но при искусственном допущении полной ненадежности моста $\mathbf{(p_{23}(t)=0)}$, что равносильно удалению ребра $\mathbf{b_{23}}$ из сети, рис.3.

Подобное последовательное разложение (стягивание узлов и вынос ребер) исходной структуры производится до тех пор, пока оставшиеся подструктуры не будут представлять собой комбинации последовательно-параллельных моделей. В рассматриваемом примере таковыми будут продукты разложения, приведенные на рис.2, 3, при этом $\mathbf{k_{1,4}=1}$, а в качестве ЭР выступило МС $\mathbf{b_{23}}$. Подставив в (1) выполненные по последовательно - параллельным схемам свертки полученных подструктур, будем иметь (для упрощения выражений опустив в дальнейшем "от t ")

$$P_{1,4} = p_{23}\underbrace{[1-(1-p_{12})(1-p_{13})][1-(1-p_{24})(1-p_{34})]} + (1-p_{23})\underbrace{[1-(1-p_{12}p_{24})(1-p_{13}p_{34})]} \,. \qquad (2)$$

Раскрыв в (2) $P_{14}\Big|_{p_{23}=1}$ скобки и приведя $P_{14}\Big|_{p_{23}=0}$ подобные, окончательно получим

$$\begin{aligned} P_{1,4} = {} & p_{12}p_{24} + p_{13}p_{34} + p_{12}p_{34}p_{23} + \underline{p_{24}p_{13}p_{23}} - p_{12}p_{24}p_{13}p_{34} - p_{12}p_{24}p_{34}p_{23} - \\ & \underline{\underline{p_{12}p_{24}p_{13}p_{23}}} - p_{12}p_{13}p_{34}p_{23} - \underline{p_{24}p_{13}p_{34}p_{23}} + \underline{\underline{2p_{12}p_{24}p_{13}p_{34}p_{23}}} \,. \end{aligned} \qquad (3)$$

Можно увидеть, что расчет $\mathbf{P_{1,4}}$ методом прямого перебора ПЦ (матрица ПЦ и СПЦ представлена таблицей 1) покажет величину

$$\begin{aligned} P_{1,4} = {} & p_{12}p_{24} + p_{13}p_{34} + p_{12}p_{34}p_{23} + \underline{p_{24}p_{13}p_{32}} - p_{12}p_{24}p_{13}p_{34} - p_{12}p_{24}p_{34}p_{23} - \\ & - \underline{\underline{p_{12}p_{24}p_{13}p_{32}}} - p_{12}p_{13}p_{34}p_{23} - \underline{p_{24}p_{13}p_{34}p_{32}} + p_{12}p_{24}p_{13}p_{34}p_{23} + \underline{\underline{p_{12}p_{24}p_{13}p_{34}p_{32}}} \,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Легко убедиться, что выражения (3) и (4) содержат слагаемые, соответствующие всем ПЦ, а также их дизъюнктивным объединениям - СПЦ, и отличны лишь в однообразно отмеченных конституентах, при этом идентичность (3) и (4) наступает при выполнении условия $\mathbf{p_{23} = p_{32}}$. Это говорит о том, что анализируемый метод оценки структурной надежности двухполюсных сетей справедлив лишь в случаях, когда значения надежности МС, по которым производятся разложения, симметричны. Действительно, пусть МС - однонаправленная (ориентированная) дуга $\hat{\mathbf{b}}_{23}$, рис. 4. Это значит, что дуга $\hat{\mathbf{b}}_{32}$ отсутствует , т.е. $\mathbf{p_{32} = 0}$. Разложение такой структуры по условию $\mathbf{p_{23} = 1}$ (рис.5) внесет погрешность в результат $\mathbf{P_{1,4}}$, поскольку объединение узла **2** с **3** в этом случае хоть и правомерно, т.к. простой путь (ПП) $(\mathbf{b_{12}}, \hat{\mathbf{b}}_{23}, \mathbf{b_{34}})$ и его комбинации через полученную таким образом объединенную вершину 2(3) могут проходить $\left(\exists \hat{\mathbf{b}}_{23}\right)$, но обратное же слияние - узла **3** с **2** недопустимо, ибо, в этом случае, ПП $(\mathbf{b_{13}}, \hat{\mathbf{b}}_{32}, \mathbf{b_{24}})$ и его объединений с другими ПП через данную вершину нет $\left(\nexists \hat{\mathbf{b}}_{32}\right)$. Другими словами, в результирующем выражении $\mathbf{P_{1,4}}$ по Муру - Шеннону появятся 4 значащие слагаемые, истинные же значения которых будут равны 0, ввиду наличия в них сомножителя, фактическое значение которого определяется ве- личиной $\mathbf{p_{32} = 0}$. Это обусловит погрешность искомой надежности $\mathbf{P_{1,4}}$.

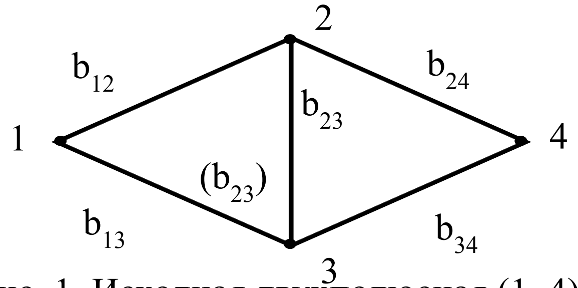

Рис. 1. Исходная двухполюсная (1, 4) мостиковая схема

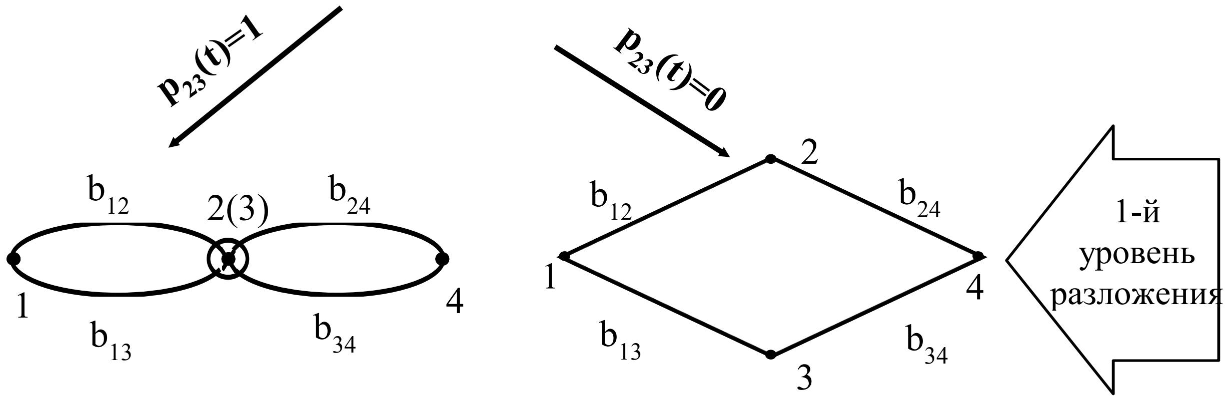

Рис. 2. Подструктура разложения исходной схемы при полной надежности моста - ребра b_{23}

Рис. 3. Подструктура разложения исходной схемы при полной ненадежности моста - ребра b_{23}

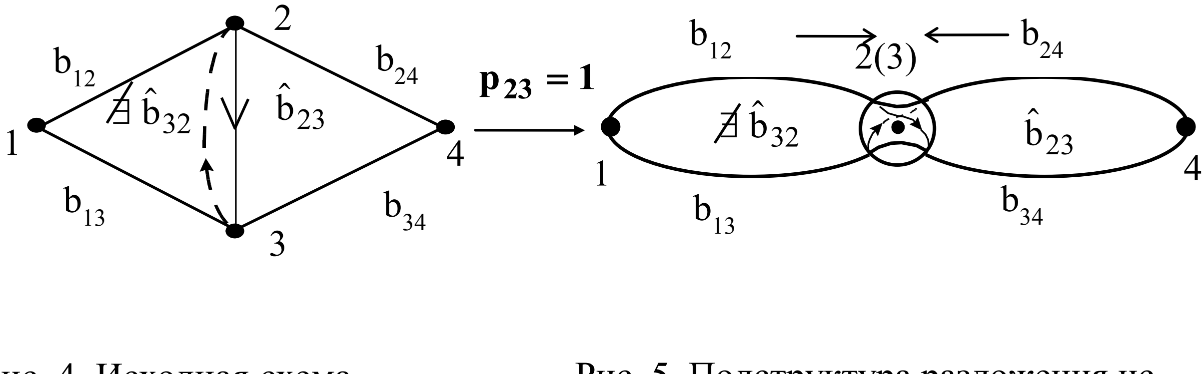

Рис. 4. Исходная схема

Рис. 5. Подструктура разложения исходной схемы при полной надежности моста - дуги $\hat{b}_{23}$

Таблица 1. Матрица простых цепей и их комбинаций

№	$\left\{C^{i}_{m1,4}\right\}, i=\overline{1,4}$	b_{12}	b_{24}	b_{13}	b_{34}	b_{23}	b_{32}	Знак	Πp_{jl}, $j,l=\overline{1,4}$
1	1	1	1	0	0	0	0	+	$p_{12}\, p_{24}$
2	2	0	0	1	1	0	0	+	$p_{13}\, p_{34}$
3	3	1	0	0	1	1	0	+	$p_{12}\, p_{34}\, p_{23}$
4	4	0	1	1	0	0	1	+	$p_{24}\, p_{13}\, p_{32}$
5	12	1	1	1	1	0	0	-	$p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{34}$
6	13	1	1	0	1	1	0	-	$p_{12}\, p_{24}\, p_{34}\, p_{23}$
7	14	1	1	1	0	0	1	-	$p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{32}$
8	23	1	0	1	1	1	0	-	$p_{12}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{23}$
9	24	0	1	1	1	0	1	-	$p_{24}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{32}$
10	34	1	1	1	1	1	1	-	$\cancel{p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{23}\, p_{32}}$
11	123	1	1	1	1	1	0	+	$p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{23}$
12	234	1	1	1	1	1	1	+	$\cancel{p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{23}\, p_{32}}$
13	341	1	1	1	1	1	1	+	$\cancel{p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{23}\, p_{32}}$
14	412	1	1	1	1	0	1	+	$p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{32}$
15	1234	1	1	1	1	1	1	-	$\cancel{p_{12}\, p_{24}\, p_{13}\, p_{34}\, p_{23}\, p_{32}}$

Приведенное обоснование необходимости симметрии МС, как ЭР мостиковых схем, ограничивает неориентированными сетями область использования метода Мура - Шеннона для получения точной оценки структурной надежности двухполюсных конфигураций топологически распределенных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филин Б. П. Методы анализа структурной надежности сетей связи. - М.: Радио и связь, 1988. - 208с.

2. Глазунов Л. П., Грабовецкий В. П., Щербаков О. В. Основы теории надежности автоматических систем управления. - Л.:Энергоатомиздат, 1984. - 208с.