УДК 519.92

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАСПОЗНАВАЕМЫХ ОБРАЗОВ

Ю.В. Паржин

Рассмотрено качественное представление контуров распознаваемых образов в виде траекторий движения фазовых точек абстрактных динамических систем.

Для описания контуров и поверхностей образов возможно использование теории дифференциальной геометрии, исследующей кривые и поверхности методами математического анализа. Особые точки кривых имеют важное значение в описании структуры образов, так как осуществляют взаимосвязь структурных элементов образов. Особые точки могут играть значительную роль при распознавании образов. Являясь точками перехода от одного непрерывного структурного элемента образа к другому, они инвариантны относительно аффинных преобразование данных структурных элементов и могут служить ключевыми точками в процессе распознавания образов. Однако, несмотря на всю привлекательность подобного подхода, необходимость аналитического представления структур образов создает практические трудности в реализации системы распознавания образов.

Более предпочтительным мог бы служить качественный подход к распознаванию образов, основанный на качественной теории дифференциальных уравнений. В этой связи, интересно было бы представление распознаваемых образов в виде динамических систем.

Распознаваемые образы можно представить в виде динамических систем с двух точек зрения:

1). Образ в целом представляется в виде динамической системы, состояния которой определяют движение и трансформацию образа в пространстве.

2). Поверхности, составляющие образ в пространстве, либо штриховые образы на плоскости представляются в виде фазовой траектории движения абстрактной фазовой точки соответственно в пространстве либо на плоскости. Элементы структуры образа, в этом случае, будут представляться в виде элементов траектории движения фазовой точки.

Второй подход к представлению распознаваемых образов в виде динамических систем, позволяет рассматривать, в частности, распознавание неформализованных графических штриховых контурных образов на плоскости, как процесс исследования поведения динамической системы, ее движения по фазовой траектории. При этом, непрерывность кривых и отрезков, составляющих структуру образа на плоскости, представляется непрерывностью траектории движения фазовой точки, а особые точки кривых - особыми точками фазовой траектории. Непрерывность траектории движения фазовой точки $\dot{\omega}_i$ определяется непрерывностью функции $g(f_i(\omega_1, \dots, \omega_m))$, непрерывность которой в свою очередь, зависит от монотонного изменения параметров $\omega_1, \dots, \omega_m$. Функция $g(\dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_n)$, определенная на $\mathfrak{R}^n$, будет монотонной, если из условия $\dot{\omega}_1 \le \dot{\omega}'_1, \dots, \dot{\omega}_n \le \dot{\omega}'_n$ всегда следует $(\dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_n) \le g(\dot{\omega}'_1, \dots, \dot{\omega}'_n)$ или наоборот [1]. Таким образом, при монотонном изменении параметров $\omega_1, \dots, \omega_n$, при условии

$$\lim_{\Delta\omega_i \to 0,\ \omega \in E} \Delta\dot{\omega} = 0, \qquad (1)$$

где $\Delta\omega_i = \omega'_i - \omega_i$ при $i = \overline{1,m}$, $\omega_i \in E$; $E \subset \mathfrak{R}$;

$$\Delta\dot{\omega} = f(\omega'_1, \dots, \omega'_n) - f(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

траектория фазовой точки $\dot{\omega}$ будет непрерывной. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если существует монотонное изменение параметров $\omega_1, \dots, \omega_m$ на траектории $g^t\dot{\omega}$ динамической системы g^t, то динамическая система на данной траектории орбитально устойчива.

Доказательство.

Орбитальная устойчивость - это свойство траектории $g^t\dot{\omega}$ автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{\omega} = f(\omega)$, $\omega \in \mathfrak{R}^h$, состоящее в том, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякая положительная полутраектория, начинающаяся в δ- окрестности траектории $g^t\dot{\omega}$, содержится в ε- окрестности траектории $g^t\dot{\omega}$ (положительная полутраектория - множество значений решения $\omega(t)$ при $t \ge 0$). Если точка $\dot{\omega}$ устойчива по Ляпунову, то траектория $g^t\dot{\omega}$ орбитально устойчива [1].

Устойчивостью по Ляпунову точки $\dot{\omega}$ относительно динамической системы g^t есть устойчивость по Ляпунову этой точки относительно семейства отображений $\{g^t\}_{t\in G^+}$ (здесь G^+ - множество неотрицательных чисел: действительных $G = \mathfrak{R}$ или целых $G = Z$) [2].

Так как траектория фазовой точки $\dot{\omega}$ является непрерывной по условию (1), то существует непрерывность в этой точке отображения $\dot{\omega} \to \dot{\omega}(\bullet)$ ее окрестности во множество функций $\dot{\omega}(\bullet)$, определенных формулой $\dot{\omega}(t) = g_t(\dot{\omega})$, наделенное топологией равномерной сходимости на G^+, что эквивалентно устойчивости по Ляпуново этой точки относительно семейства отображений $\{g^t\}_{t\in G^+} : E \to E$ по определению [2].Так как непрерывность траектории $g^t\dot{\omega}$ определяется монотонным изменением параметров $\omega_1,\dots,\omega_m$, что было показано выше, то фазовые точки $\dot{\omega}$ этой траектории будут устойчивы по Ляпунову и, следовательно, динамическая система g^t на данной траектории орбитально устойчива. Что и требовалось доказать .

<u>Свойство 1.</u> Траектория $g^t\dot{\omega}$ динамической системы g^t с монотонно изменяющимися параметрами $\omega_1,\dots,\omega_n$ фазовых точек $\dot{\omega}_i$, ограниченная особыми точками $\dot{\omega}_0$, $\dot{\omega}'_0$, устойчива по Лагранжу.

Если траектория $g^t\dot{\omega}$ задана на пространстве $X= \mathfrak{R}^n$, то ограниченность траектории определяет ее устойчивость по Лагранжу [3]. Причем, если при всех $t\in\mathfrak{R}^+$ (соответственно, при всех $t\in\mathfrak{R}^-$) точки траектории содержатся в некотором предкомпактном множестве, то траектория $g^t\dot{\omega}$ положительно (соответственно отрицательно) устойчива по Лагранжу.

<u>Определение 1.</u> Если динамическая система g^t на траектории $g^t\dot{\omega}$ устойчива по Ляпунову и по Лагранжу, то назовем ее **L**-устойчивой на данной траектории. Таким образом, если при монотонном изменении параметров $\omega_1,\dots,\omega_n$ фазовых точек $\dot{\omega}_i$, динамическая система g^t переходит из одного **L**-устойчивого состояния S_1 в другое **L** -устойчивое состояние S_2, то данный этап развития динамической системы можно описать эволюционным уравнением типа $S_2 = h(t, S_1,\omega'_0)$, где момент перехода из состояния S_1 в состояние S_2 определяется особой точкой ω'_0.

Развитие динамической системы $\mathbf{g}^t$ будет являться прогрессивным, если при переходе из состояния $\mathbf{S}_i$ в состояние $\mathbf{S}_{i+1}$ увеличивается количество параметров типа ω, либо усложняется их взаимосвязь, что, в конечном итоге, ведет к увеличению размерности пространства в котором определены фазовые точки $\dot{\omega}_i$. Развитие системы $\mathbf{g}^t$ будет являться регрессивным, если при переходе из состояния $\mathbf{S}_i$ в состояние $\mathbf{S}_{i+1}$ уменьшается размерность пространства в котором определены фазовые точки $\dot{\omega}_i$. Система $\mathbf{g}^t$ будет являться разрушающейся, если при уменьшении размерности пространства в котором определены фазовые точки $\dot{\omega}_i$, система не переходит в **L**-устойчивое состояние . Динамическая система $\mathbf{g}^t$ будет являться стабильной, если при переходе из состояния $\mathbf{S}_i$ в состояние $\mathbf{S}_{i+1}$ размерность пространства в котором определены фазовые точки $\dot{\omega}_i$ не изменяется.

Устойчивые траектории фазовых $\dot{\omega}_i$ и особых $\dot{\omega}_0$ точек стабильных динамических систем в $\mathbf{m + i}$ - мерном пространстве будут представлять собой описание глобального поведения динамической системы $\mathbf{g}^t$.

Таким образом, из предложения о рассмотрении структуры распознаваемых штриховых контурных образов на плоскости в виде траекторий фазовых точек абстрактных динамических систем следует, что полное описание структуры данных образов будет соответствовать описанию глобального поведения абстрактных динамических систем. Подобный качественный подход к рассмотрению структуры образов позволяет определить качественное распознавание образов как процесс установления структурной непрерывности и структурного прерывания элементов контуров образов, что соответствует определению устойчивых траекторий в поведении динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения, - М.: 1968, т.4. - №8. - 1360с.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: 1967. - 525с.

3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М.: 1954. - 347с.