УДК 621.317.74

СИНТЕЗ БИНАРНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА С НОРМИРУЕМЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ СОСТАВОМ

д.т.н. В.Н. Чинков, В.В. Стадник

Решается задача синтеза бинарного полигармонического тестового сигнала с нормируемым спектральным составом, обладающего высокой помехозащищенностью при достаточно простой аппаратурной реализации. Получено аналитическое соотношение для определения оптимального набора фаз гармонических составляющих синтезируемого сигнала.

Одним из важнейших критериев сравнения тестовых сигналов является помехозащищенность. Известно множество способов ее оценки, но в любом случае решающее влияние на помехозащищенность имеет отношение сигнал/шум на входе контролируемого объекта, которое при фиксированном уровне шума полностью определяется видом измерительного сигнала. Среди всех сигналов максимальное отношение сигнал/шум обеспечивает сигнал, имеющий наибольшее возможное по модулю мгновенное значение в каждый момент времени, т.е. бинарный сигнал. С другой стороны, бинарный сигнал позволяет изменением моментов переключения его уровней в достаточно широких пределах управлять спектральным составом сигнала.

Таким образом, высокая помехозащищенность бинарных сигналов, при достаточно простой аппаратурной реализации, делает весьма перспективным их применение в задачах измерения и контроля. Этим подтверждается актуальность задачи синтеза бинарных сигналов, спектральный состав которых с наибольшей точностью совпадает с требуемым спектральным составом.

Представив требуемый сигнал $\mathbf{f(\alpha)}$, который, вообще говоря, не является бинарным, и формируемый бинарный сигнал $\mathbf{F(\alpha)}$ с периодом $\mathbf{T}$ рядами Фурье на интервале $\mathbf{(-T/2;\ T/2)}$, получим

$$\mathbf{f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{d}_n e^{jn\alpha} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\alpha + \psi_n\right)}\ ; \qquad (1)$$

$$\mathbf{F}(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{D}_n e^{jn\alpha} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\alpha + \varphi_n) \ , \qquad (2)$$

где $\alpha=\omega_0 t$; $\omega_0=2\pi/T$ - основная частота сигналов;

$$\dot{d}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)e^{-jn\alpha}d\alpha = \frac{1}{2}c_n e^{j\psi_n} \quad \text{при} \quad n \neq 0 \qquad (3)$$

- комплексные коэффициенты Фурье требуемого сигнала $f(\alpha)$;

$$\dot{D}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)e^{-jn\alpha}d\alpha = \frac{1}{2}C_n e^{j\varphi_n} \quad \text{при} \quad n \neq 0 \qquad (4)$$

- комплексные коэффициенты Фурье бинарного сигнала $F(\alpha)$; c_n и ψ_n, C_n и φ_n - амплитуды и начальные фазы n - той гармоники сигналов $f(\alpha)$ и $F(\alpha)$ соответственно; $c_0=\dot{d}_0$, $C_0=\dot{D}_0$ - постоянные составляющие сигналов.

Отсюда следует математическая постановка задачи синтеза, которая сводится к задаче о наилучшей аппроксимации бинарным сигналом $F(\alpha)$ требуемого сигнала $f(\alpha)$ с нормированным спектральным составом. В качестве критерия точности аппроксимации (критерия оптимизации) примем минимум дисперсии

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(\alpha) - f(\alpha)\right|^2 \ . \qquad (5)$$

Преобразуя выражение (5), получим

$$E = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} F^2(\alpha)d\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\alpha)d\alpha - 2\int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)f(\alpha)d\alpha\right]. \qquad (6)$$

В соотношении (6) первый член имеет фиксированное значение, задаваемое уровнем F_0 бинарного сигнала

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^2(\alpha)d(\alpha) = 2\pi F_0^2 \ .$$

Второй член в формуле (6) на основании равенства Парсеваля [1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\alpha)d\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\dot{d}_n\right|^2 ,$$

не зависит от фаз ψ_n и, следовательно, является известным даже в том случае, когда начальные фазы ψ_n не задаются. Таким образом, на основании выражения (6), приходим к выводу о том, что наименьшее значение дисперсии E будет получено для такого сигнала $F(\alpha)$, у которого величина

$$H = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)f(\alpha)d\alpha \qquad (7)$$

достигает максимального значения.

Так как наибольшее и наименьшее значения бинарного сигнала есть $+F_0$ и $-F_0$, то очевидно, что максимальное значение подынтегрального выражения в формуле (7) в каждой точке и интеграла в целом будет получено, если взять значение сигнала $F(\alpha) = +F_0$ при $f(\alpha) > 0$ и $F(\alpha) = -F_0$ при $f(\alpha) < 0$, т.е.

$$F(\alpha) = F_0(\alpha)\,\mathrm{sgn}\, f(\alpha) = F_0\,\mathrm{sgn}\left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\alpha + \psi_n\right)\right]. \qquad (8)$$

Для сигнала, спектральный состав которого задан по амплитуде и по фазе, в каждый момент времени известно мгновенное значение $f(\alpha)$. В этом случае выражение (8) полностью решает задачу синтеза оптимального бинарного сигнала $F(\alpha)$.

Вместе с тем большой практический интерес представляет задача, в которой в требуемом спектре сигнала $f(\alpha)$ задаются только амплитуды c_n гармоник, а фазы ψ_n гармоник могут быть произвольными. Так как величина H, а, следовательно, и дисперсия E зависят от фаз ψ_n гармоник, то для различных их наборов $\{\psi_n\}$ значения дисперсии E будут также различны. Исходя из этого, возникает задача определения такого набора фаз $\{\psi_n\}$, для которого значение дисперсии E минимально.

Преобразуем соотношение (7), используя выражения (1) и (2),

$$H = 2C_0c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n c_n \cos\left(\varphi_n - \psi_n\right) .$$

Из этого соотношения видно, что максимум величины **H** достигается при выполнении условия $\psi_n = \varphi_n$, которое с учетом выражений (4) и (8) дает уравнение для оптимального набора фаз

$$\psi_n = \arg\left\{ \frac{U}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{sgn}\left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\alpha + \psi_n\right)\right)\right] e^{-jn\alpha} d\alpha \right\}. \qquad (9)$$

Формула (9) является сложным трансцендентным выражением и строгое аналитическое ее решение, по-видимому, невозможно. Поэтому для определения оптимального набора фаз $\{\psi_n\}$ используем итерационный алгоритм, математическую запись которого представим в виде

$$\psi_n^{r+1} = \arg\left\{ \frac{U}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{sgn}\left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\alpha + \psi_n^r\right)\right)\right] e^{-jn\alpha} d\alpha \right\},$$

где $\{\psi_n^r\}$ **-** набор фаз, полученный на **r -** том шаге итераций.

Приведенный метод решения задачи синтеза полигармонического сигнала позволяет получить оптимальный полигармонический бинарный тестовый сигнал, спектральный состав которого с максимальной точностью совпадает с требуемым спектральным составом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: 1968. - 720 с.