

ОБОБЩЕННАЯ ОЦЕНКА ПРАВИЛЬНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЕВЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

к.т.н. А.В. Бетин, М.Н. Мурин
(Представил д.т.н. А.И. Рыженко)

Получены неравенства, учет которых позволяет дать обобщенную оценку правильности экспериментального определения осевых моментов инерции как ЛА, так и любого тела вообще.

Своеобразной проверкой правильности расчетного или экспериментального определения моментов инерции является то обстоятельство, что для тела произвольной формы моменты инерции относительно осей любой прямоугольной системы координат связаны определенной системой нестрогих неравенств [1, 2].

Действительно, осевые моменты инерции тела относительно осей прямоугольной системы координат OXYZ выражаются формулами

$$I_X = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) \quad ; \quad I_Y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2);$$

$$I_Z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2),$$

где I_X, I_Y, I_Z - осевые моменты инерции тела относительно осей OX, OY, OZ;

m_i - масса i -го элемента тела;

n - общее число элементов тела, на которое оно условно разбито;

x_i, y_i, z_i - координаты i -го элемента тела.

Поэтому, сложив I_X с I_Y , будем иметь

$$I_X + I_Y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) + \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) + \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i^2 + z_i^2) = I_Z + 2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i^2,$$

т.е.

$$I_X + I_Y \geq I_Z.$$

После аналогичных преобразований, получим

$$I_X + I_Z = I_Y + 2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i^2;$$

$$I_Y + I_Z = I_X + 2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i^2,$$

а, следовательно,

$$I_X + I_Z \geq I_Y;$$

$$I_Y + I_Z \geq I_X.$$

Таким образом, для тела произвольной формы относительно осей любой прямоугольной системы координат сумма любых двух осевых моментов инерции не меньше третьего.

При экспериментальном определении осевых моментов инерции летательного аппарата (ЛА), полученные неравенства приобретают вид

$$\begin{cases} I_X^{\text{ист}} + I_Y^{\text{ист}} \geq I_Z^{\text{ист}}, \\ I_Z^{\text{ист}} + I_X^{\text{ист}} \geq I_Y^{\text{ист}}, \\ I_Y^{\text{ист}} + I_Z^{\text{ист}} \geq I_X^{\text{ист}}, \end{cases} \quad (1)$$

где $I_X^{\text{ист}}, I_Y^{\text{ист}}, I_Z^{\text{ист}}$ - истинные значения осевых моментов инерции ЛА.

Истинные значения моментов инерции ЛА неизвестны. Возможно указать лишь диапазоны их возможных значений. Поэтому, принимая за измеренные располагаемые значения моментов инерции, можно записать, что

$$\begin{cases} I_X^{\text{расп}} - \Delta I_X^{\text{эц}} \leq I_X^{\text{ист}} \leq I_X^{\text{дэи}} + \Delta I_X^{\text{эц}}; \\ I_Y^{\text{расп}} - \Delta I_Y^{\text{эц}} \leq I_Y^{\text{ист}} \leq I_Y^{\text{дэи}} + \Delta I_Y^{\text{эц}}; \\ I_Z^{\text{расп}} - \Delta I_Z^{\text{эц}} \leq I_Z^{\text{ист}} \leq I_Z^{\text{дэи}} + \Delta I_Z^{\text{эц}}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\Delta I_X^{\text{изм}}, \Delta I_Y^{\text{изм}}, \Delta I_Z^{\text{изм}}$ - максимально возможные погрешности

измерений моментов инерции ЛА.

Неравенства (2) должны выполняться для любых истинных значений моментов инерции из указанных диапазонов, но наибольший интерес (в последующих рассуждениях) представляют их предельные значения. Не трудно заметить также, что для моментов инерции в этих неравенствах круговой перестановкой индексов одного из неравенств можно получить оставшиеся два. Следовательно, и результат, достигнутый при опе-

рациях с одним из неравенств, возможно перенести на другие неравенства из рассматриваемой группы.

Для определенности рассмотрим первое из неравенств (2) (хотя, конечно, можно взять и все неравенства сразу, но рассматривать все равно придется лишь одно из них) и перепишем его в наиболее сильном виде

$$\min(I_X^{\text{эп}} + I_Y^{\text{эп}}) \geq \max(I_Z^{\text{эп}}),$$

а, заменяя $I_X^{\text{ист}}$, $I_Y^{\text{ист}}$, $I_Z^{\text{ист}}$ соответствующими выражениями для предельных значений из (2), получим

$$I_X^{\text{расп}} - \Delta I_X^{\text{эц}} + I_Y^{\text{эп}} - \Delta I_Y^{\text{эц}} \geq I_Z^{\text{эп}} + \Delta I_Z^{\text{эц}}$$

или

$$I_X^{\text{расп}} + I_Y^{\text{эп}} - I_Z^{\text{эп}} \geq \Delta I_X^{\text{эц}} + \Delta I_Y^{\text{эц}} + \Delta I_Z^{\text{эц}}. \quad (3)$$

Тогда, в соответствии с выше изложенным, должны выполняться и следующие неравенства:

$$I_X^{\text{расп}} + I_Z^{\text{эп}} - I_Y^{\text{эп}} \geq \Delta I_X^{\text{эц}} + \Delta I_Y^{\text{эц}} + \Delta I_Z^{\text{эц}}; \quad (4)$$

$$I_Y^{\text{расп}} + I_Z^{\text{эп}} - I_X^{\text{эп}} \geq \Delta I_X^{\text{эц}} + \Delta I_Y^{\text{эц}} + \Delta I_Z^{\text{эц}}. \quad (5)$$

Следовательно, сумма располагаемых значений любых двух осевых моментов инерции, уменьшенная на значение третьего момента должна быть не меньше суммы значений максимально возможных погрешностей их измерений.

Использование неравенств (3)-(5) позволяет дать обобщенную оценку правильности экспериментального определения осевых моментов инерции как ЛА, так и любого тела вообще.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетин А.В., Рыженко А.И., Рябков В.И., Черановский О.Р. Определение размеров и массово-инерционных параметров свободнолетающих динамически подобных моделей самолетов. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1992. - 101 с.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.К. Курс теоретической механики. - М. Высшая школа, 1974. - 528 с.