УДК 621.396

О КОРРЕКТНОСТИ МЕТОДОВ СИНТЕЗА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

д.т.н. проф. Г.В. Алешин

В работе изложена сущность распространения теории радиоизмерений и приведены области радиотехники, где она обычно используется. Предлагается использовать классический метод максимального правдоподобия.

Известно, что львиная доля научных работ по статистической радиотехнике основана на использовании метода максимума функционала правдоподобия. Однако, при более детальном рассмотрении этого метода оказалось, что он в принципе неверен, и поэтому, все, основанные на нем виды синтеза алгоритмов и структур измерительных систем, синтез их технических параметров и сигналов, обработка векторных процессов и траекторий, неприемлемы.

Такой метод максимума функционала правдоподобия получил распространение от Ф.М. Вудворда [1, 2]. Сущность его состоит в простейшем предположении, что флуктуационный шум $\mathbf{n(t)}$ гауссов и дельта - коррелирован. Функционал бесконечномерной плотности вероятности отрезка шума $\mathbf{n(t)}$ записывается в виде

$$\mathbf{p[n(t)] = K \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T n^2(t)dt\right\}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{N_0}$ - спектральная плотность мощности шума $\mathbf{n(t)}$.

На входе системы обработки действует смесь сигнала $\mathbf{S(t,\ \lambda_u)}$ с истинным параметром $\mathbf{\lambda_u}$ и шума $\mathbf{n(t)}$.

$$\mathbf{y(t) = S(t, \lambda_и) + n(t)}. \tag{2}$$

Подставляя в выражение (1) значение $\mathbf{n(t)}$ из формулы (2), получим

$$\mathbf{p[n(t)] = K\,exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [y(t) - S(t,\lambda_u)]^2\,dt\right\}}. \qquad (3)$$

Заметим, что выражение (3), как и (1), не зависит от сигнала, или от параметра $\boldsymbol{\lambda_и}$, ввиду равенства (2), так как $\mathbf{y(t) - S(t,\lambda_и) = n(t)}$.

Ф.М. Вудворд подставляет в сигнал $\mathbf{S(t,\lambda_и)}$ в выражении (3) после возведения в квадрат, так называемый, опорный параметр $\boldsymbol{\lambda_0}$ вместо истинного неизвестного параметра $\boldsymbol{\lambda_и}$. Что при этом произошло ? Под интегралом вместо разности $\mathbf{y(t) - S(t,\lambda_и)}$, равной точно $\mathbf{n(t)}$, оказалась разность

$$\mathbf{y(t) - S(t,\lambda_0) = S(t,\lambda_и) + n(t) - S(t,S_0)}, \qquad (4)$$

отличающаяся от $\mathbf{n(t)}$ на значение разности $\mathbf{S(t,\lambda_и) - S(t,\lambda_0)}$. Тогда выражение (3) после подстановки Ф.М. Вудворда $\boldsymbol{\lambda_0}$ вместо $\boldsymbol{\lambda_и}$ в сигнале $\mathbf{S(t,\lambda_и)}$ станет зависимым от $\boldsymbol{\lambda_и}$ и от $\boldsymbol{\lambda_0}$**.** А если выражение (3) стало зависимым от $\boldsymbol{\lambda_и}$**,** то функционал (3), как теперь стало ясно, несправедливо назвали условным распределением вероятности $\boldsymbol{\lambda_и}$ при условии воздействия на входе $\mathbf{y(t) = S(t,\lambda_и)+n(t)}$. Напомним, что зависимость (3) от $\boldsymbol{\lambda_и}$ появилась только тогда, когда вместо $\boldsymbol{\lambda_и}$ подставили $\boldsymbol{\lambda_0}$. Правда, Ф.М. Вудворд подставлял $\boldsymbol{\lambda_0}$ в интеграл $\mathbf{-\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\lambda_u)dt}$. Однако это не меняет существо рассмотренного.

Получив таким образом функционал правдоподобия, Ф.М. Вудворду и другим несложно определять оценку истинного параметра как математического ожидания, а также алгоритм изменений и структуру измерителя. Дисперсия распределения станет характеристикой "потенциальной точности". А поскольку функционал (3) при подстановке $\boldsymbol{\lambda_0}$ вместо $\boldsymbol{\lambda_и}$ в сигнале $\mathbf{S(t,\lambda_и)}$ зависит еще и от формы сигнала, то отсюда появился синтез сигнала по критерию потенциальной точности. Эти выводы распространили также на векторный процесс $\overline{\boldsymbol{\lambda_u}}$, на случай использования априорных сведений о $\overline{\boldsymbol{\lambda_u}}$ и так далее.

Чтобы наглядней показать, что же получилось при замене $\lambda_и$ известным опорным значением λ_0, разложим $S(t, \lambda_и)$ в ряд Тейлора в окрестности λ_0.

Тогда

$$S(t,\lambda_u) = S(t,\lambda_0) + S_\lambda{}'(t,\lambda_0)\Delta\lambda + S_\lambda{}''(t,\lambda_0)\frac{\Delta\lambda^2}{2} + \ldots, \qquad (5)$$

где $\Delta\lambda = \lambda_и - \lambda_0$.

Получившуюся разность можно преобразовать следующим образом:

$$y(t) - S(t,\lambda_0) = n(t) + S(t,\lambda_и) - S(t,\lambda_0).$$

Добавка к разности $y(t) - S(t,\lambda_и)$ равна

$$S(t,\lambda_u) - S(t,\lambda_0) = \sum_{i=1}^{n} S_\lambda^{(i)} \frac{\Delta\lambda^i}{i!}. \qquad (6)$$

Следовательно, если подставить (6) вместо прежней разности $y(t) - S(t,\lambda_и)$, то получим новый функционал $p_и[n(t)]$, где

$$p_н[n(t)] = K\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[n(t) + \sum_{i=1}^{n} S_\lambda^{(i)}\frac{\Delta\lambda^i}{i!}\right]^2 dt\right\}. \qquad (7)$$

Так как шум $n(t)$ и сигнал $S(t,\lambda_0)$ обычно ортогональны, то

$$p_н[n(t)] = K\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T n^2(t)dt\right\}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n} S_\lambda^{(i)}\frac{\Delta\lambda^i}{i!}\right]^2 dt\right\}. \qquad (8)$$

Отсюда видно, что $p_н[n(t)]$ (8) отличается от $p[n(t)]$ сомножителем

$$\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n} S_\lambda^{(i)}\frac{\Delta\lambda^i}{i!}\right]^2 dt\right\}, \tag{9}$$

который появился благодаря подмене: вместо $\lambda_и$ вставили λ_0. Очевидно, что при малом уклонении, т.е. при $\Delta\lambda \approx 0$ сомножитель вырождается в единицу. Этот сомножитель по существу и принимают за функционал правдоподобия, хотя ясно, что его существование обязано подмене значений $\lambda_и$ на λ_0. Далее определяют дисперсию σ_λ^2 или потенциальную точность σ_λ^{-2}. Дисперсия σ_λ^2 обратно пропорциональна коэффициенту одночлена полинома при $\Delta\lambda^2$, если член $S_\lambda^{(i)}\frac{\Delta\lambda^i}{i!}$ убывают существенно при увеличении i.

Для четной функции $S(t,\lambda_и)$

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{N_0}{\int_0^T\left[S_\lambda{}'(t,\lambda_0)\right]^2 dt}. \tag{10}$$

Для случая подстановки Ф.М. Вудворда λ_0 в интеграл $-\frac{1}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\lambda_u)dt$, который стало возможным называть корреляционным,

$$\sigma_\lambda^2 = N_0 \Big/ \int_0^T S(t,\lambda_0)S_\lambda''(t,\lambda_u)dt.$$

На основании (8) и (9) видно, что при малых уклонениях $\Delta\lambda=\lambda_и-\lambda_0\approx 0$ известного λ_0 от истинного значения $\lambda_и$, полученный "функционал правдоподобия" как угодно близко приближается к исходному. Это обстоятельство не меняет логику рассуждений: различие λ_0 и $\lambda_и$ определяет возникновение "функционала правдоподобия".

Но даже, если принять выражение (8) за функционал правдоподобия и считать (8) стохастической аппроксимацией (3), все равно прийдем к противоречию. Действительно, пусть точность аппроксимации функционала (3) выражением (8) оценим относительной погрешностью α

$$\alpha = \frac{p - p_н}{p} = 1 - \frac{p_н}{p}. \tag{11}$$

Если слагаемые $S_\lambda^{(i)} \dfrac{\Delta\lambda^i}{i!}$ при экспоненте (9) убывают то, ограничиваясь первой производной $S_\lambda{}'(t, \lambda_0)$ в разложении (5), получим

$$\alpha = 1 - \exp\left\{-\frac{\Delta\lambda^2}{N_0}\int_0^T \left[S_\lambda{}'(t, \lambda_0)\right]^2 dt\right\} = 1 - e^{-\frac{\Delta\lambda^2}{2\sigma_\lambda^2}}, \tag{12}$$

где $\sigma_\lambda^{-2} = \dfrac{1}{N_0}\displaystyle\int_0^T \left[S_\lambda{}'(t, \lambda_0)\right]^2 dt$ - "потенциальная точность" оценивания параметра $\lambda_и$ сигнала.

Отсюда следует, что

$$\Delta\lambda \cong \sigma_\lambda \sqrt{2(1-\alpha)}. \tag{13}$$

Это означает, что для достижения требуемой точности аппроксимации априорное уклонение $\Delta\lambda = \lambda_и \lambda_0$ должно удовлетворять соотношению (13), так как $\Delta\lambda$ с требуемым доверием 0,997 меньше $3\sigma_{a\lambda}$, где $\sigma_a{}^2{}_\lambda$ - априорная дисперсия, то есть

$$\sigma_{\alpha\lambda} \le \frac{\sigma_\lambda}{3}\sqrt{2(1-\alpha)}. \tag{14}$$

Из выражения (14) следует, что априорная дисперсия должна быть значительно меньше апостериорной, например при $\alpha = 0{,}5$ $\sigma_{\alpha\lambda} \langle \dfrac{\sigma_\lambda}{3}$, что невозможно или нецелесообразно.

В истинном методе максимума функционала правдоподобия (3) оценку $\lambda_и{}^*$ получают из условия $\frac{dp(y - S(t, \lambda_u))}{d\lambda_u} = 0$.

Решение тривиально и записывается как

$$S(t,\lambda_и{}^*)=y(t). \tag{15}$$

Оно очевидно и без функционала (3).

Исходя из изложенного, можно сделать следующие выводы.

1.Теория изменений, основанная на использовании метода Ф.М. Вудворда, некорректна ввиду подмены понятий λ_0 вместо $\lambda_и$.

2. Даже малое уклонение λ_0 от $\lambda_и$ не меняет вывода 1.

3. Существующие теории и направления, основанные на указанной подмене, в том числе синтез алгоритмов и структур измерителей, синтез сигналов по полученным критериям точности и синтез параметров системы, нельзя признать корректными.

4. Можно показать, что известная "потенциальная точность" значительно завышена, по сравнению с реальной, ввиду сглаживания флуктуационного шума в интеграле.

5. Поскольку известно, что наибольшее отношение сигнал/шум достигается при согласованной фильтрации и что при вудвордовском методе также формируется корреляционный интеграл, то структура корреляционных измерителей может совпадать, если при этом не используется априорное распределение плотности вероятности параметра $\lambda_и$. Остальные реальные измерители: многошкальные, функциональные, многоэтапные и др., не вытекают из рассмотрений "теории измерений".

6. Изложенное не относится к случаю обнаружения сигнала в шумах, поскольку при этом не производится подстановка λ_0 вместо$\lambda_и$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигнала. - М.: Советское радио, 1970. - 334 с.

2. Вудворд Ф.М. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации. - Советское радио, 1955. - 203 с.