

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.А. Ганенко, д.т.н. С.С. Недорезов
(представил д.т.н. проф. Ю.С. Шмалый)

Проведен анализ колебаний анизотропных пьезоэлектрических резонаторов. В рамках линейной пьезоэлектрической теории получено эффективное уравнение, описывающее собственные колебания резонатора в случае выпуклых пьезоэлементов. Показано, что анизотропия пьезоэлектрика обуславливает наличие линейной составляющей в эффективном уравнении, что приводит к смещению локализации колебаний от центра электрода.

Применение кварцевых резонаторов в качестве основных элементов стабилизации частоты в современной радиоэлектронной технике привело к необходимости детального исследования собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов. В выпуклых пьезоэлементах [1,2] существуют колебания, локализованные в центре электрода. В настоящей работе показано, что анизотропия пьезоэлектрика обуславливает наличие линейной (в дополнение к квадратичной) составляющей в эффективном уравнении, описывающем данные колебания. Изучено влияние границ электродов на частотный спектр колебаний.

1. Следуя [1], уравнения линейной пьезоэлектрической теории можно записать в виде

$$\rho_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{U}_j}{\partial t^2} = \tilde{C}_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \partial x_j}, \quad (1)$$

где $\tilde{U}(U, U_4)$ - четырехмерный вектор смещения, $U(U_1, U_2, U_3)$ - вектор смещения, $U_4 = \phi$ - электростатический потенциал, \tilde{C}_{ijkl} - обобщенная матрица модулей упругости размера $4 \times 3 \times 4 \times 3$, которая равна матрице C_{ijkl} модулей упругости при $i, j, k, l = 1, 2, 3$ и выражается соотношении-

© Е.А. Ганенко, д.т.н. С.С. Недорезов, 1998

ями $\tilde{C}_{4jkl} = e_{jkl}$, $\tilde{C}_{ij4l} = e_{lij}$, $\tilde{C}_{4i4j} = -\varepsilon_{ij}/4\pi$ через пьезоэлектрические константы ε_{ijk} и тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij} , массовый тензор $\rho_{ij} = \rho(\delta_{ij} - \delta_{i4}\delta_{j4})$, ρ - плотность кристалла, δ_{ij} - символ Кронекера. По повторяющимся индексам производится суммирование в пределах размера матрицы \tilde{C} .

Решение системы уравнений (1) определяем в виде

$$\tilde{U}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \sum_n A_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \tilde{U}_{jn}(\mathbf{z}, L); \quad (2)$$

где $\tilde{U}_{jn}(\mathbf{z}; L)$ - собственные решения уравнения

$$-\omega_n^2 \rho_{ij} \tilde{U}_j = \tilde{C}_{i3k3} \frac{\partial^2 \tilde{U}_k}{\partial z^2} \quad (3)$$

для пьезоэлектрической пластины с металлическим покрытием. Здесь L - толщина, $\omega_n(L)$ - частота собственных колебаний пластины.

В случае выпуклого пьезоэлемента в разложении (2) для \tilde{U}_j полагаем $A_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = A_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\omega t}$ и толщину L , зависящей от \mathbf{x} и \mathbf{y} :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx L_0 - \frac{x^2 + y^2}{2R}, \quad (4)$$

где R - радиус кривизны. Получаемую в результате подстановки, (2) в (1) систему дифференциальных уравнений относительно функций $A_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ далее сводим (см.[2]) к обобщенному уравнению относительно одной функции $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, соответствующей рассматриваемой частоте колебаний.

Оставляя главные члены по малому параметру $1/R$ в обобщенном уравнении, получаем

$$-d_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 A}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left(\omega_n^2 + a - b_\alpha x_\alpha + c(x_1^2 + x_2^2) \right) A = \omega^2 A(x_1, x_2),$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{\alpha\beta} &= \frac{\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{nn}}{\rho_n} + \sum_{\substack{m \\ m \neq n}} \frac{(\mathbf{a}_{\alpha}^{nm} - \mathbf{a}_{\alpha}^{mn})(\mathbf{a}_{\beta}^{mn} - \mathbf{a}_{\beta}^{nm})}{\rho_n \nu_m - \rho_m \nu_n}, \\
\mathbf{a} &= \frac{1}{\mathbf{R}} \left(\frac{\mathbf{g}_{\alpha\alpha}^{nn}}{\rho_n} + \sum_{\substack{m \\ m \neq n}} \frac{(\mathbf{a}_{\alpha}^{nm} - \mathbf{a}_{\alpha}^{mn}) \mathbf{d}_{\alpha}^{mn}}{\rho_n \nu_m - \rho_m \nu_n} \right), \\
\mathbf{b}_{\alpha} &= \frac{\mathbf{d}_{\alpha}^{nn}}{\mathbf{R} \rho_n}, \quad \mathbf{c} = \frac{\omega_n}{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial \omega_n}{\partial \mathbf{L}} \right|; \quad \alpha, \beta = 1, 2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Величины \mathbf{a}_{α}^{nm} , $\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{nm}$, \mathbf{d}_{α}^{nm} , $\mathbf{g}_{\alpha\beta}^{nm}$, ρ_n , ν_n определены в [2].

В основном приближении по малому параметру $\lambda/r_0 \ll 1$ (λ - радиус локализации колебаний, r_0 - размер металлического покрытия пьезоэлемента) решение уравнения (5) приводит к эквидистантному по квадрату частоты спектру колебаний. Уточнение спектра, связанное с решением обобщенного уравнения дано в работе [2]. В настоящей работе исследовано влияние границы металлического покрытия (электрода) на частотный спектр колебаний пьезоэлектрического резонатора.

2. Анализ частотного спектра колебаний резонатора проведен на основе уравнения (5) с нулевым условием для $A(x_1, x_2)$ на границе электрода. Нулевое граничное условие справедливо в области частот [3]

$$\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega_{nF}^2 - \omega_n^2} \ll 1, \tag{7}$$

где ω_{nF} - частоты колебаний пластины без металлического покрытия (вне электрода).

Переходим в (5) к собственным осям (\mathbf{x}, \mathbf{y}) тензора $\mathbf{d}_{\alpha\beta}$. В случае кругового электрода радиуса r_0 решение уравнения (5) с нулевым граничным условием можно представить в виде разложения

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m,l} \frac{A_{ml}}{\omega^2 - (\omega_n^2 + \Delta + \omega_{ml}^2)} \Psi_m(\mathbf{x} - \zeta_1) \Psi_l(\mathbf{y} - \zeta_2) \tag{8}$$

по собственным функциям гармонического осциллятора

$$\Psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{c}}{\pi^2 \mathbf{v}} \right)^{1/8} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}! 2^{\mathbf{m}}}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{v}}} \mathbf{x}^2} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{m}} \left(\mathbf{x} \left(\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{v}} \right)^{1/4} \right), \quad (9)$$

где $\mathbf{H}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ -полином Эрмита, $\zeta_1 = \frac{\mathbf{b}_x}{2\mathbf{c}}$; $\zeta_2 = \frac{\mathbf{b}_y}{2\mathbf{c}}$; $\Delta = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}_x^2 + \mathbf{b}_y^2}{4\mathbf{c}}$,
 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ – собственные значения тензора $\mathbf{d}_{\alpha\beta}$, $\varepsilon = \mathbf{v}_1/\mathbf{v}_2$,

$$\omega_{\mathbf{ml}}^2 = \sqrt{\mathbf{c}\mathbf{v}_1} \left(2\mathbf{m} + 1 + \frac{2\mathbf{l} + 1}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad \mathbf{m}, \mathbf{l} = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Зависимость коэффициентов $\mathbf{c}, \varepsilon, \mathbf{v}_1$ от индекса \mathbf{n} (см.(6)) в (10) опущена.

Коэффициенты $\mathbf{A}_{\mathbf{ml}}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{A}_{\mathbf{ml}} = \sum_{\mathbf{m}'\mathbf{l}'} \frac{\mathbf{W}_{\mathbf{ml}, \mathbf{m}'\mathbf{l}'}}{\omega^2 - (\omega_{\mathbf{n}}^2 + \Delta + \omega_{\mathbf{m}'\mathbf{l}'}^2)} \mathbf{A}_{\mathbf{m}'\mathbf{l}'}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{W}_{\mathbf{ml}, \mathbf{m}'\mathbf{l}'} = \int_0^{2\pi} \Psi_{\mathbf{ml}}(\mathbf{r}_0 \cos \varphi, \mathbf{r}_0 \sin \varphi) \cdot \left[\mathbf{v}_1 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{v}_2 \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right] \times \quad (12)$$

$$\times \Psi_{\mathbf{m}'\mathbf{l}'}(\mathbf{r}_0 \cos \varphi, \mathbf{r}_0 \sin \varphi) \mathbf{r}_0 d\varphi.$$

Здесь $\Psi_{\mathbf{ml}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x} - \zeta_1) \Psi_{\mathbf{l}}(\mathbf{y} - \zeta_2)$.

Решая (11) по теории возмущений, для частотного спектра колебаний получаем

$$\omega_{\mathbf{nml}}^2 = \omega_{\mathbf{n}}^2 + \Delta + \omega_{\mathbf{ml}}^2 + \mathbf{W}_{\mathbf{ml}} \quad (13)$$

где частоты $\omega_{\mathbf{ml}}$ определяются формулой (10) и соответствуют частоте $\omega_{\mathbf{n}}$. Поправка $\mathbf{W}_{\mathbf{ml}}$ описывает влияние границы электрода на частотный спектр и определяется выражением

$$\begin{aligned}
W_{m1} = & -\sqrt{c v_1} \frac{\rho_0}{\sqrt{\pi \varepsilon^{1/4}}} \cdot \frac{1}{m! l! 2^{m+1}} \times \int_0^{2\pi} \exp\left\{ - [(\rho_0 \cos \varphi + \xi_0)^2 + \right. \\
& \left. + (\rho_0 \sin \varphi + \eta_0)^2 \sqrt{\varepsilon}] \right\} \times \left\{ \sin \varphi (\rho_0 \sin \varphi - \eta_0) + \sqrt{\varepsilon} \cos (\rho_0 \cos \varphi - \xi_0) \right\} \times \\
& \times H_1^2 \left(\varepsilon^{1/4} (\rho_0 \sin \varphi - \eta_0) \right) - \frac{2l}{\varepsilon^{1/4}} \sin \varphi H_m^2 (\rho_0 \cos \varphi - \xi_0) \times \\
& \times H_1 \left(\varepsilon^{1/4} (\rho_0 \sin \varphi - \eta_0) \right) H_{l-1} \left(\varepsilon^{1/4} (\rho_0 \sin \varphi - \eta_0) \right) - \\
& - 2m \sqrt{\varepsilon} \cos \varphi H_m (\rho_0 \cos \varphi - \xi_0) H_{m-1} (\rho_0 \cos \varphi - \xi_0) \times \\
& \times H_1^2 \left(\varepsilon^{1/4} (\rho_0 \sin \varphi - \eta_0) \right) \Big\} d\varphi,
\end{aligned} \tag{14}$$

где радиус электрода ρ_0 и компоненты (ξ_0, η_0) вектора $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, определяющие центр локализации колебаний, выражены в безразмерных единицах:

$$\rho_0 = r_0 (c/v_1)^{1/4}; \quad \xi_0 = \zeta_1 (c/v_1)^{1/4}; \quad \eta_0 = \zeta_2 (c/v_2)^{1/4}.$$

Из (14) для поправки W_{00} имеем

$$\begin{aligned}
W_{00} = & \frac{\rho_0 \sqrt{c v_1}}{\sqrt{\pi \varepsilon^{1/4}}} \int_0^{2\pi} \left(\sin \varphi (\rho_0 \sin \varphi - \eta_0) + \sqrt{\varepsilon} (\rho_0 \cos \varphi - \xi_0) \right) \times \\
& \times \exp \left[- (\rho_0 \cos \varphi - \xi_0)^2 - \sqrt{\varepsilon} (\rho_0 \sin \varphi - \eta_0)^2 \right] d\varphi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Анизотропия пьезоэлектрика обуславливает линейную $(\mathbf{b}_\alpha \mathbf{x}_\alpha)$ составляющую в уравнении (5) наряду с квадратичной $(\mathbf{c}(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2))$, что существенно отличает данное уравнение от уравнений, полученных ранее [4,1], и приводит к смещению локализации колебаний от центра электрода на вектор (ζ_1, ζ_2) .

$$\text{Величины } \zeta_{1,2} = \frac{\mathbf{b}_{1,2}}{2c} \sim \frac{v_{1,2}}{2L_0 \omega_n^2} = \kappa_{1,2}^2 \mathbf{R}, \text{ полагая } c \sim \frac{\omega_n^2}{\mathbf{R} L_0}.$$

Числа $\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{v_{1,2}}{RL_0\omega_n^2}}$ можно определить из экспериментальных зна-

чений частот ω_{mnl} . Для SC кварцевого резонатора [2] имеем $\kappa_2 = 0,02$;

$\varepsilon = \frac{v_1}{v_2} = 0,5$. Отсюда для компонент вектора смещения (ζ_1, ζ_2) полу-

чаем оценку $\zeta_{1,2} \sim 10^{-4} R$.

Смещение локализации колебаний от центра электрода приводит к существенной зависимости частотного спектра от размеров электрода, что может быть использовано для получения необходимых при конструировании резонатора соотношений между частотами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peach R. C. A variational method for the design of trapped energy resonators.- Proc. 39 Annual Frequency Control Symposium. – 1985, p.392-399.

2. Недорезов С. С., Ганенко О. О. Частотный спектр п'єзоелектричних резонаторів. - Доповіді НАН України. – 1996. - № 10. - С. 31-35.

3. Недорезов С. С. Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов.- Известия вузов СССР, Радиофизика. – 1990. № 12. - С. 1417-1422.

4. Stevens D. S., Tiersten H. F. Analysis of doubly-rotated contoured quartz crystal resonators.- Proc. 39 Annual Frequency Control Symposium. – 1985, p.436-446.
