УДК 621.372.412:537.226.86

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.А. Ганенко, д.т.н. С.С. Недорезов
(представил д.т.н. проф. Ю.С. Шмалий)

Проведен анализ колебаний анизотропных пьезоэлектрических резонаторов. В рамках линейной пьезоэлектрической теории получено эффективное уравнение, описывающее собственные колебания резонатора в случае выпуклых пьезоэлементов. Показано, что анизотропия пьезоэлектрика обусловливает наличие линейной составляющей в эффективном уравнении, что приводит к смещению локализации колебаний от центра электрода.

Применение кварцевых резонаторов в качестве основных элементов стабилизации частоты в современной радиоэлектронной технике привело к необходимости детального исследования собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов. В выпуклых пьезоэлементах [1,2] существуют колебания, локализованные в центре электрода. В настоящей работе показано, что анизотропия пьезоэлектрика обусловливает наличие линейной (в дополнение к квадратичной) составляющей в эффективном уравнении, описывающем данные колебания. Изучено влияние границ электродов на частотный спектр колебаний.

1. Следуя [1], уравнения линейной пьезоэлектрической теории можно записать в виде

$$\rho_{ij}\frac{\partial^2 \tilde{U}_j}{\partial t^2} = \tilde{C}_{ijkl}\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \partial x_j} , \qquad (1)$$

где $\tilde{U}(U, U_4)$ - четырехмерный вектор смещения, $U(U_1, U_2, U_3)$ - вектор смещения, $U_4 = \varphi$ - электростатический потенциал, $\tilde{C}_{ijkl}$ - обобщенная матрица модулей упругости размера $4\times3\times4\times3$, которая равна матрице C_{ijkl} модулей упругости при $i, j, k, l = 1,2,3$ и выражается соотношениями $\widetilde{C}_{4jkl} = e_{jkl}$, $\widetilde{C}_{ij4l} = e_{lij}$, $\widetilde{C}_{4i4j} = -\varepsilon_{ij}/4\pi$ через пьезоэлектрические константы ε_{ijk} и тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij}, массовый тензор $\rho_{ij} = \rho(\delta_{ij} - \delta_{i4}\delta_{j4})$, ρ - плотность кристалла, δ_{ij} - символ Кронекера. По повторяющимся индексам производится суммирование в пределах размера матрицы $\widetilde{C}$.

Решение системы уравнений (1) определяем в виде

$$\widetilde{U}_j(x,y,z,t) = \sum_n A_n(x,y,t)\widetilde{U}_{jn}(z,L); \tag{2}$$

где $\widetilde{U}_{jn}(z;L)$ - собственные решения уравнения

$$-\omega_n^2\rho_{ij}\widetilde{U}_j = \widetilde{C}_{i3k3}\frac{\partial^2\widetilde{U}_k}{\partial z^2} \tag{3}$$

для пьезоэлектрической пластины с металлическим покрытием. Здесь L - толщина , $\omega_n(L)$-частота собственных колебаний пластины.

В случае выпуклого пьезоэлемента в разложении (2) для $\widetilde{U}_j$ полагаем $A_n(x,y,t,) = A_n(x,y)e^{i\omega t}$ и толщину L, зависящей от x и y:

$$L(x,y) \approx L_0 - \frac{x^2+y^2}{2R}, \tag{4}$$

где R - радиус кривизны. Получаемую в результате подстановки, (2) в (1) систему дифференциальных уравнений относительно функций $A_n(x,y)$ далее сводим (см.[2]) к обобщенному уравнению относительно одной функции $A(x,y)$, соответствующей рассматриваемой частоте колебаний.

Оставляя главные члены по малому параметру $1/R$ в обобщенном уравнении, получаем

$$-d_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 A}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left(\omega_n^2 + a - b_\alpha x_\alpha + c\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)A = \omega^2 A\left(x_1, x_2\right),$$

где

$$\mathbf{d}_{\alpha\beta}=\frac{\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{nn}}{\rho_n}+\sum_{\substack{m\\ m\neq n}}\frac{\left(\mathbf{a}_\alpha^{nm}-\mathbf{a}_\alpha^{mn}\right)\left(\mathbf{a}_\beta^{mn}-\mathbf{a}_\beta^{nm}\right)}{\rho_n\nu_m-\rho_m\nu_n},$$

$$\mathbf{a}=\frac{1}{\mathbf{R}}\left(\frac{\mathbf{g}_{\alpha\alpha}^{nn}}{\rho_n}+\sum_{\substack{m\\ m\neq n}}\frac{\left(\mathbf{a}_\alpha^{nm}-\mathbf{a}_\alpha^{mn}\right)\mathbf{d}_\alpha^{mn}}{\rho_n\nu_m-\rho_m\nu_n}\right), \tag{6}$$

$$\mathbf{b}_\alpha=\frac{\mathbf{d}_\alpha^{nn}}{\mathbf{R}\rho_n},\qquad \mathbf{c}=\frac{\omega_n}{\mathbf{R}}\left|\frac{\partial\omega_n}{\partial\mathbf{L}}\right|;\quad \alpha,\beta=1,2.$$

Величины $\mathbf{a}_\alpha^{nm},\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{nm},\mathbf{d}_\alpha^{nm},\mathbf{g}_{\alpha\beta}^{nm},\rho_n,\nu_n$ определены в [2].

В основном приближении по малому параметру $\lambda/\mathbf{r}_0<<1$ (λ - радиус локализации колебаний, $\mathbf{r}_0$-размер металлического покрытия пьезоэлемента) решение уравнения (5) приводит к эквидистантному по квадрату частоты спектру колебаний. Уточнение спектра, связанное с решением обобщенного уравнения дано в работе [2]. В настоящей работе исследовано влияние границы металлического покрытия (электрода) на частотный спектр колебаний пьезоэлектрического резонатора.

2. Анализ частотного спектра колебаний резонатора проведен на основе уравнения (5) с нулевым условием для $A(x_1,x_2)$ на границе электрода. Нулевое граничное условие справедливо в области частот [3]

$$\frac{\omega^2-\omega_n^2}{\omega_{nF}^2-\omega_n^2}<<1, \tag{7}$$

где ω_{nF}- частоты колебаний пластины без металлического покрытия (вне электрода).

Переходим в (5) к собственным осям $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ тензора $\mathbf{d}_{\alpha\beta}$. В случае кругового электрода радиуса $\mathbf{r}_0$ решение уравнения (5) с нулевым граничным условием можно представить в виде разложения

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{m,l}\frac{\mathbf{A}_{ml}}{\omega^2-\left(\omega_n^2+\Delta+\omega_{ml}^2\right)}\Psi_m(\mathbf{x}-\zeta_1)\Psi_l(\mathbf{y}-\zeta_2) \tag{8}$$

по собственным функциям гармонического осциллятора

$$\Psi_m(x)=\left(\frac{c}{\pi^2\nu}\right)^{1/8}\frac{1}{\sqrt{m!\,2^m}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\nu}}x^2}\cdot H_m\left(x\left(\frac{c}{\nu}\right)^{1/4}\right), \qquad (9)$$

где $H_m(x)$-полином Эрмита, $\zeta_1=\dfrac{b_x}{2c}$; $\zeta_2=\dfrac{b_y}{2c}$; $\Delta=a-\dfrac{b_x^2+b_y^2}{4c}$, $\nu=\nu_1,\nu_2$ —собственные значения тензора $d_{\alpha\beta}$, $\varepsilon=\nu_1/\nu_2$,

$$\omega_{ml}^2=\sqrt{c\nu_1}\left(2m+1+\frac{2l+1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \qquad m,l=0,1,2,... \qquad (10)$$

Зависимость коэффициентов c,ε,ν_1 от индекса n (см.(6)) в (10) опущена.

Коэффициенты A_{ml} удовлетворяют системе уравнений

$$A_{ml}=\sum_{m'l'}\frac{W_{ml,m'l'}}{\omega^2-\left(\omega_n^2+\Delta+\omega_{m'l'}^2\right)}A_{m'l'}, \qquad (11)$$

где

$$W_{ml,m'l'}=\int_0^{2\pi}\Psi_{ml}(r_0\cos\varphi,r_0\sin\varphi)\cdot\left[\nu_1\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\nu_2\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right]\times \qquad (12)$$
$$\times\Psi_{m'l'}(r_0\cos\varphi,r_0\sin\varphi)r_0d\varphi.$$

Здесь $\Psi_{ml}(x,y)=\Psi_m(x-\zeta_1)\Psi_l(y-\zeta_2)$.

Решая (11) по теории возмущений, для частотного спектра колебаний получаем

$$\omega_{nml}^2=\omega_n^2+\Delta+\omega_{ml}^2+W_{ml} \qquad (13)$$

где частоты ω_{ml} определяются формулой (10) и соответствуют частоте ω_n. Поправка W_{ml} описывает влияние границы электрода на частотный спектр и определяется выражением

$$W_{ml} = -\sqrt{c\nu_1}\,\frac{\rho_0}{\sqrt{\pi\varepsilon^{1/4}}}\cdot\frac{1}{m!l!2^{m+1}}\times\int_0^{2\pi}\exp\Big\{-\big[(\rho_0\cos\varphi+\xi_0)^2 +$$
$$+(\rho_0\sin\varphi+\eta_0)^2\sqrt{\varepsilon}\big]\Big\}\times\Big\{\Big(\sin\varphi(\rho_0\sin\varphi-\eta_0)+\sqrt{\varepsilon}\cos(\rho_0\cos\varphi-\xi_0)\Big)\times$$
$$\times H_l^2\left(\varepsilon^{1/4}(\rho_0\sin\varphi-\eta_0)\right)-\frac{2l}{\varepsilon^{1/4}}\sin\varphi H_m^2(\rho_0\cos\varphi-\xi_0)\times \tag{14}$$
$$\times H_l\left(\varepsilon^{1/4}(\rho_0\sin\varphi-\eta_0)\right)H_{l-1}\left(\varepsilon^{1/4}(\rho_0\sin\varphi-\eta_0)\right)-$$
$$-2m\sqrt{\varepsilon}\cos\varphi H_m(\rho_0\cos\varphi-\xi_0)H_{m-1}(\rho_0\cos\varphi-\xi_0)\times$$
$$\times H_l^2\left(\varepsilon^{1/4}(\rho_0\sin\varphi-\eta_0)\right)\Big\}d\varphi,$$

где радиус электрода ρ_0 и компоненты (ξ_0,η_0) вектора $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$, определяющие центр локализации колебаний, выражены в безразмерных единицах:

$$\rho_0 = r_0(c/\nu_1)^{1/4};\qquad \xi_0=\zeta_1(c/\nu_1)^{1/4};\qquad \eta_0=\zeta_2(c/\nu_2)^{1/4}.$$

Из (14) для поправки W_{00} имеем

$$W_{00} = \frac{\rho_0\sqrt{c\nu_1}}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon^{1/4}}\int_0^{2\pi}\Big(\sin\varphi(\rho_0\sin\varphi-\eta_0)+\sqrt{\varepsilon}(\rho_0\cos\varphi-\xi_0)\Big)\times \tag{15}$$
$$\times\exp\Big[-(\rho_0\cos\varphi-\xi_0)^2-\sqrt{\varepsilon}(\rho_0\sin\varphi-\eta_0)^2\Big]\,d\varphi.$$

Анизотропия пьезоэлектрика обусловливает линейную $(b_\alpha x_\alpha)$ составляющую в уравнении (5) наряду с квадратичной $\left(c(x_1^2+x_2^2)\right)$, что существенно отличает данное уравнение от уравнений, полученных ранее [4,1], и приводит к смещению локализации колебаний от центра электрода на вектор (ζ_1,ζ_2).

Величины $\zeta_{1,2}=\dfrac{b_{1,2}}{2c}\sim\dfrac{\nu_{1,2}}{2L_0\omega_n^2}=\kappa_{1,2}^2R$, полагая $c\sim\dfrac{\omega_n^2}{R\,L_0}$.

Числа $\kappa_{1,2} = \sqrt{\dfrac{\nu_{1,2}}{RL_0\omega_n^2}}$ можно определить из экспериментальных значений частот ω_{mnl}. Для SC кварцевого резонатора [2] имеем $\kappa_2 = 0,02;$ $\varepsilon = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = 0,5.$ Отсюда для компонент вектора смещения (ζ_1, ζ_2) получаем оценку $\zeta_{1,2} \sim 10^{-4} R.$

Смещение локализации колебаний от центра электрода приводит к существенной зависимости частотного спектра от размеров электрода, что может быть использовано для получения необходимых при конструировании резонатора соотношений между частотами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peach R. C. A variational method for the design of trapped energy resonators.- Proc. 39 Annual Frequensy Control Symposium. – 1985, p.392-399.
2. Недорєзов С. С., Ганенко О. О. Частотний спектр п'єзоелектричних резонаторів. - Доповіді НАН України. – 1996. - № 10. - С. 31-35.
3. Недорезов С. С. Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов.- Известия вузов СССР, Радиофизика. – 1990. № 12. - С. 1417-1422.
4. Stevens D. S., Tiersten H. F. Analysis of doubly-rotated contoured quartz crystal resonators.- Proc. 39 Annual Frequensy Control Symposium. – 1985, p.436-446.