УДК 621.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА ПРОГНОЗА В ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

к.т.н. М.И. Гиневский, В.В. Джулик
(представил проф. А.В. Королев)

Рассмотрено применение комбинированного метода прогноза нестационарного случайного процесса при помощи расширенного оператора Колмогорова - Габора и метода группового учета аргументов решения систем нормальных уравнений Гаусса для прогнозирования ошибок измерения координат и радиальной скорости космических аппаратов.

В траекторных измерениях и при навигации космических аппаратов для уменьшения влияния ионосферы на точность измерения применяются многочастотные радиомаяки когерентных сигналов, устанавливаемые на самом аппарате [1]. Сигналы этих радиомаяков могут быть использованы для непосредственного определения ошибки измерения радиальной скорости космического аппарата, а при некоторых допущениях и его координат [2], которые определяются приведенной разностью доплеровских сдвигов когерентных частот $\mathbf{F_{да}}$.

Анализ регистраций $\mathbf{F_{да}}$ позволяет считать данный нестационарный случайный процесс вторым типом нестационарности по В.С. Пугачеву [3] и построить комбинированный метод предсказания этого процесса.

Известны операторный метод предсказания, предложенный Каруненом, и метод характеристических составляющих Фармера [4].

Идею представления Фармера можно использовать для построения комбинированного метода прогноза рассматриваемого случайного процесса, который может быть представлен в виде некоторой случайной функции времени и аддитивно наложенной на нее стационарной функции

$$\mathbf{F_{ДА}(t) = F_{ДА\,H}\left(t\right) + F_{ДА\,C}\left(t\right)}. \qquad (1)$$

Рассмотрим метод, позволяющий решить задачи предсказания подобных процессов.

Пусть известны $\mathbf{M}$ реализации нестационарного случайного процесса. Для удобства решения задачи предсказания на ЭВМ каждую реализацию представим в виде дискретной последовательности значений $\left\{\mathbf{F}_{\text{ДА}\,j}\right\}, j = 1,\ldots,N$.

Значения от реализации к реализации претерпевают изменения, которые описываются стационарной случайной функцией.

Если $\mathbf{j}$ - е значение $\mathbf{i}$ - й реализации обозначим через $\mathbf{F}_{\text{ДА}ij}$ то все элементы $\mathbf{F}_{\text{ДА}\ ij}$ можно представить в виде прямоугольной случайной матрицы $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_{\text{ДА}\,ij}), i = 1,2,\ldots,M;\ j = 1,2,\ldots,N$. Каждый вектор - столбец этой матрицы представляет собой стационарную последовательность значений $\{\mathbf{F}_{\text{ДА}\ j}\}$, а вектор - строка - одну реализацию нестационарного случайного процесса.

Пусть из множества $\mathbf{N}$ значений реализации с номером $\mathbf{M + 1}$ известно некоторое количество значений $\mathbf{n}$. Эти значения обозначим $\mathbf{F}_{\text{ДА}M+1,j}$.

Задача предсказания заключается в оценке значений $\mathbf{F}^*_{\text{ДА}j}\ (j \in N - n)$ по известным значениям $\mathbf{F}_{\text{ДА}ij}$ $(i=1,2,\ldots,M,\ j=1,2,\ldots,N)$ и $\mathbf{F}_{\text{ДА}j}(j \in n)$.

Запишем предсказываемую реализацию (вектор - строку) в виде:

$$\mathbf{F}^*_{\text{ДА}\ M+1} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{C}_k \mathbf{\Phi}_k\ , \tag{2}$$

где $\mathbf{\Phi}_k$ назовем составляющими векторами.

Требуется отыскать такие значения $\mathbf{\Phi}_к$ и $\mathbf{C}_к$, чтобы вектор $\mathbf{F}_{\text{ДА}\ M+1}$ с компонентами $\mathbf{F}_{\text{ДА}\ M+1,j}$ наилучшим образом, в смысле некоторого критерия, приближался к $\mathbf{F}_{\text{ДА}\ M+1}$ для $\mathbf{j} \in \mathbf{n}$.

Учитывая стационарный характер изменений $\mathbf{F}^*_{\text{ДА}\,i}$ от реализации к реализации, можно определить $\mathbf{F}^*_{\text{ДА}\,M+1,j}$, пользуясь расширенным оператором предсказания:

$$\mathbf{F}^*_{\text{ДА}\,M+1,j} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{F}_{\text{ДА}ij} r_i + \sum_{i_1=1}^{M} \sum_{i_2=1}^{M} \mathbf{F}_{\text{ДА}i_1j} \mathbf{F}_{\text{ДА}i_2j} r_{i_1 i_2} + \ldots \tag{3}$$

Члены расширенного оператора предсказания представляют собой соответствующие компоненты $\mathbf{\Phi_{кj}}$ составляющих векторов $\mathbf{\Phi_к}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M} F_{ДА\,ij} r_i = \Phi_{1j};\\
&\sum_{i_1=1}^{M}\sum_{i_2=1}^{M} F_{ДА\,i_1 j} F_{ДА\,i_2 j} r_{i_1 i_2} = \Phi_{2j};\\
&\sum_{i_1=1}^{M}\cdots\sum_{i_k=1}^{M} r_{\{i_k\}_k} \prod_{1}^{k} F_{ДА\,i_k} = \Phi_{kj}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В качестве критерия наилучшего приближения предсказанных значений к действительным примем критерий минимума среднеквадратической ошибки:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{ДА\,j} - \sum_{k=1}^{k} C_k \Phi_{kj}\right)^2, (j \in n). \tag{5}$$

Тогда коэффициенты $\mathbf{C_к}$ определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{k} C_k \left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_{kj}\Phi_{k'j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{k'j} F_{ДА\,j}, \tag{6}$$

аналогичных тем, которые даются Фармером для вычисления коэффициентов при характеристических составляющих. Значение k определяет количество составляющих $\mathbf{\Phi_k}$, необходимое для достижения заданной точности в соответствии с выбранным критерием.

Подставив найденные коэффициенты $\mathbf{C_k}$ в (2), получим предсказанные значения $F^{*}_{ДА\,M+1,j}$.

Если исходные данные представляют собой стационарные случайные последовательности, а функции близости определяются при помощи дискретного полинома Колмогорова - Габора

$$\mathbf{F}_{ДА}^{*} = \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ДА\,i} + \sum_{i_1=1}^{M}\sum_{i_2=1}^{M} \mathbf{r}_{i_1 i_2} \mathbf{F}_{ДА\,i_1} \mathbf{F}_{ДА\,i_2} + \ldots, \qquad (7)$$

то коэффициенты можно определить двумя способами:

1) при помощи составления и решения системы нормальных уравнений Гаусса;

2) при помощи методов адаптации, в частности, стохастической аппроксимации.

Использование нормальных уравнений считалось практически возможным только в простых случаях, при небольшом числе аргументов и малой степени неполного полинома.

А.Г. Ивахненко был предложен метод группового, а точнее попарного, учета аргументов, который изменяет выводы в пользу метода нормальных уравнений.

Рассмотрим метод попарного учета на конкретном примере предсказания будущего значения случайной последовательности. Допустим, что мы решим использовать для предсказания четыре последних по времени данных $\mathbf{F}_{ДА\,1}$, $\mathbf{F}_{ДА\,2}$, $\mathbf{F}_{ДА\,3}$, $\mathbf{F}_{ДА\,4}$. В полиноме Колмогорова - Габора будет всего семьдесят членов: пять - первой степени, десять - второй, двадцать - третьей и тридцать пять - четвертой степени. Чтобы получить систему условных уравнений, достаточно написать полином семьдесят раз для семидесяти различных положений текущего интервала. Для составления нормальных уравнений, усредняющих влияние разброса измерений, число учитываемых интервалов должно быть увеличено еще в 5-10 раз. В результате получим систему из семидесяти нормальных уравнений, содержащих семьдесят неизвестных коэффициентов $\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{r}_{69}$. Размерность матрицы системы нормальных уравнений равна 70×70. Если матрица хорошо обусловлена, то решение системы на ЭВМ дает искомый ответ.

Метод попарного учета аргументов состоит в рекурентном решении нескольких систем нормальных уравнений, составленных для каждой пары аргументов и для новых вспомогательных переменных $\mathbf{F}_{ДА1}^{*}, \mathbf{F}_{ДА2}^{*}, \ldots, \mathbf{F}_{ДАi}^{*}$. В данном примере при наличии четырех аргументов можно воспользоваться не одним, а тремя почти однотипными полиномами:

$$\mathbf{F}^*_{\text{ДА }1} = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{r}_{11}\mathbf{F}_{\text{ДА }1} + \mathbf{r}_{21}\mathbf{F}_{\text{ДА }2} + \mathbf{r}_{31}\mathbf{F}^2_{\text{ДА }1} + \mathbf{r}_{41}\mathbf{F}^2_{\text{ДА }2} + $$
$$+ \mathbf{r}_{51}\left(\mathbf{F}_{\text{ДА }1}\mathbf{F}_{\text{ДА }2} + \mathbf{F}_{\text{ДА }1}\mathbf{F}_{\text{ДА }3} + \mathbf{F}_{\text{ДА }2}\mathbf{F}_{\text{ДА }4}\right);$$
$$\mathbf{F}^*_{\text{ДА }2} = \mathbf{r}_{02} + \mathbf{r}_{12}\mathbf{F}_{\text{ДА }3} + \mathbf{r}_{22}\mathbf{F}_{\text{ДА }4} + \mathbf{r}_{32}\mathbf{F}^2_{\text{ДА }3} + \mathbf{r}_{42}\mathbf{F}^2_{\text{ДА }4} + $$
$$+ \mathbf{r}_{52}(\mathbf{F}_{\text{ДА }3}\mathbf{F}_{\text{ДА }4} + \mathbf{F}_{\text{ДА }1}\mathbf{F}_{\text{ДА }3} + \mathbf{F}_{\text{ДА }2}\mathbf{F}_{\text{ДА }3});$$
$$\mathbf{F}^*_{\text{ДА}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\mathbf{F}^*_{\text{ДА }1} + \mathbf{r}_2\mathbf{F}^*_{\text{ДА }2} + \mathbf{r}_3\mathbf{F}^{*2}_{\text{ДА }1} + \mathbf{r}_4\mathbf{F}^{*2}_{\text{ДА }2} + \mathbf{r}_5\mathbf{F}^*_{\text{ДА }1}\mathbf{F}^*_{\text{ДА }2}.$$

При вычислении коэффициентов полагаем $\mathbf{F}^*_{\text{ДА }1} = \mathbf{F}^*_{\text{ДА}}$ и $\mathbf{F}^*_{\text{ДА }2} = \mathbf{F}^*_{\text{ДА}}$, а затем, зная коэффициенты, находим $\mathbf{F}^*_{\text{ДА }1}$ и $\mathbf{F}^*_{\text{ДА }2}$ как функции времени и используем их в результирующем, третьем полиноме.

Цель такого метода - резкое повышение точности при одновременном уменьшении объема вычислений. При четырех аргументах вместо системы уравнений с матрицей 70×70 элементов достаточно три раза решить систему с матрицей 6×6 элементов. В общем случае систему с матрицей $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ элементов достаточно решить $\mathbf{S - 1}$ раз, где $\mathbf{S}$ - число аргументов.

Важным качеством метода попарного учета аргумента, развивающего комбинированный метод предсказания для обработки экспериментальных данных, является его быстродействие и простота реализации на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космические траекторные измерения / Под ред. П.А. Агаджанова, В.Е. Дулевича, А.А. Коростелева. - М.: Сов. радио, 1969. - 504 с.
2. Солодовников Г.К., Синельников В.М., Крохмальников Е.Б. Дистанционное зондирование ионосферы Земли с использованием радиомаяков космических аппаратов. - М.: Наука, 1988. - 191 с.
3. Пугачев В.С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления.- М.: Физматгиз, 1962. - 883 с.
4. Лапа В.Г. Методы предсказания и предсказывающие системы. К.: Вища школа, 1980. - 183 с.