

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

А.Н. Маркин, Б.В. Остроумов
(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

В статье приводится аналитическое решение частной одномерной краевой задачи теории колебаний систем с непрерывно - дискретными параметрами.

Решения краевых задач теории колебаний сводятся, по существу, к определению собственных значений, связанных с собственными частотами или другими параметрами исследуемой системы, и нахождению собственных функций (форм колебаний). Если собственные значения и собственные функции найдены, тогда можно считать краевую задачу решенной [1].

Универсальным методом решения одномерных краевых задач теории колебаний систем с непрерывными, непрерывно - дискретными и кусочно - непрерывными параметрами является метод, основанный на применении нормальных фундаментальных систем, позволяющий получить конечные выражения в аналитической форме [2].

В то же время математические модели достаточно широкого класса механических систем с распределенными параметрами содержат уравнения динамики, фундаментальные системы которых не нормируются.

Рассмотрим, например, одномерную краевую задачу о малых свободных колебаниях однородной нерастяжимой нити с закрепленным нижним концом, несущую на верхнем конце дискретную массу m_T и удерживаемую вертикально - тянущим усилием \bar{P} в положении близком к вертикальному (так называемого "перевернутого" маятника) (рис.1).

Математическая модель рассматриваемой задачи, составленная в рамках допущений принятых в [3], имеет следующий вид. Найти решение уравнения движения нити

$$\rho(l) \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left[T(l) \frac{\partial X}{\partial l} \right], \quad (1)$$

где $\rho(l)$ - линейная плотность нити;

© А.Н. Маркин, Б.В. Остроумов, 1998

$X(l,t)$ - горизонтальные отклонения точек нити от вертикали;

$T(l)$ - закон изменения натяжения по длине нити;

l - ось равновесного положения нити,

удовлетворяющее граничным условиям, соответственно, закрепленного нижнего и свободного верхнего (рис.2) концов нити

$$X(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 X(L, t)}{\partial t^2} + g(k_0 - 1) \cdot \frac{\partial X(L, t)}{\partial l} = 0, \quad (2)$$

где L - длина нити;

k_0 - относительная нагрузка верхнего конца нити и начальным условиям движения

$$X(l, 0) = f(l), \quad \frac{\partial X(l, 0)}{\partial t} = F(l). \quad (3)$$

где $f(l)$ и $F(l)$ - функции, определяющие соответственно положение нити и скорости ее точек в начальный момент времени.

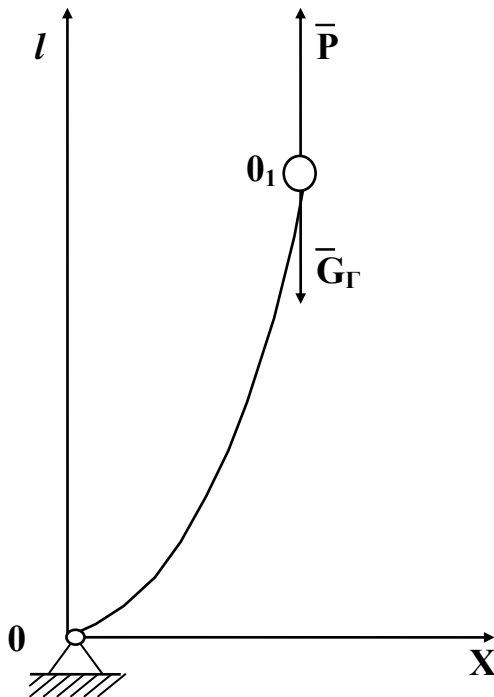


Рисунок 1 - "Перевернутый" маятник с постоянными непрерывными и дискретными параметрами

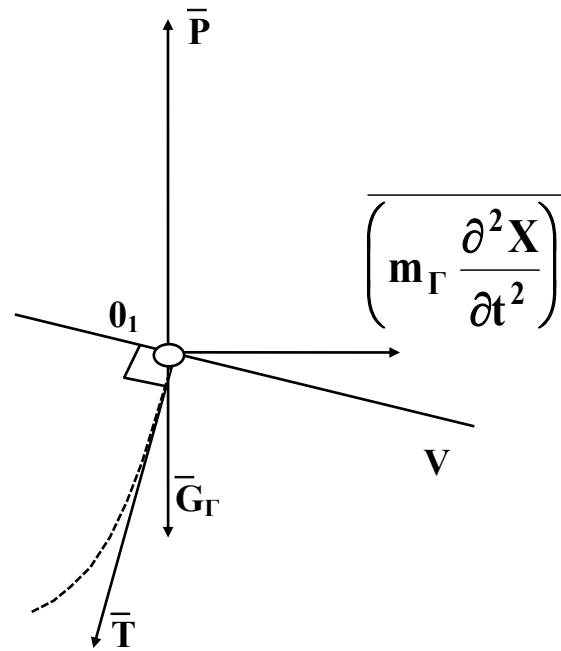


Рисунок 2 - Модель граничных условий верхнего конца нити

... ластков (рис.3), где ее линейная плотность $\rho_i(l)$ сохраняет постоянные значения $\rho_i(l) = \text{const} = \rho_i (i=1,2, \dots k \dots n)$.

Тогда для каждого i -го интервала непрерывности в рамках принятых в [3], допущений будет справедливо, с учетом (1) следующее одномерное уравнение

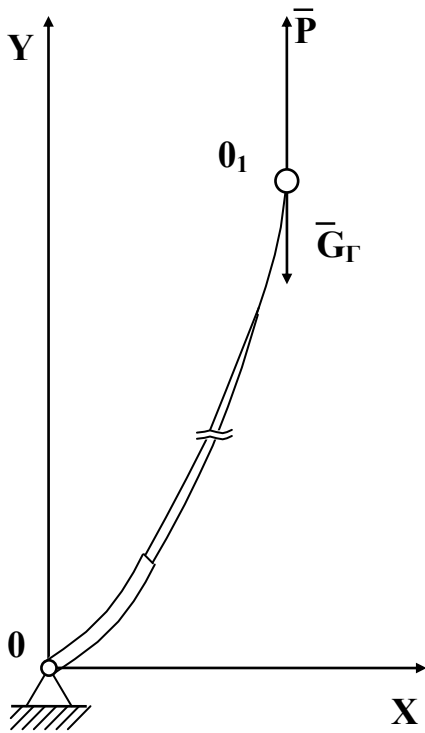


Рисунок 3 - "Перевернутый" маятник с постоянными кусочно - непрерывными и дискретными параметрами

$$\rho_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left[T_i(l) \frac{\partial X_i}{\partial l} \right], \quad (4)$$

где X_i - горизонтальные отклонения точек i -го интервала от вертикали;

$T_i(l)$ - закон изменения натяжения по длине i -го интервала нити,

решение которого должно удовлетворять условиям сопряжения на границах интервала:

$$X_{i+1}(l_i, t) = X_i(l_i, t), \quad (5)$$

$$T_{i+1}(l_i) X'_{i+1}(l_i, t) = T_i(l_i) X'_i(l_i, t). \quad (6)$$

После разделения переменных в уравнении (4) и условиях сопряжения (5) и (6), представляя $X(l,t)=Z(l,t)$, $S(l,t)$ на основании (1), (2) и (3) приходим к граничной задаче на собственные значения и собственные функции для системы с кусочно - непрерывными и дискретными параметрами, которая формулируется следующим образом.

Найти решение уравнения

$$\frac{d}{dl} \left[T(l)_i \frac{dZ_i(l)}{dl} \right] + a_i^2 \rho_i Z_i(l) = 0, \quad (7)$$

удовлетворяющее граничным условиям на концах:

$$\begin{aligned} Z_1(0) &= 0, \\ g(k_0 - 1)Z'_n(L) - a_n^2 Z_n(L) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

и условиям сопряжения на границах участков $l_i < l < l_{i+1}$:

$$\begin{aligned} Z_i(l_i) &= Z_{i+1}(l_i), \\ T_i(l_i)Z'_i(l_i) &= T_{i+1}(l_i)Z'_{i+1}(l_i), \end{aligned} \quad (9)$$

где $Z_i(l)$ - функция, зависящая только от текущей длины нити;

a - постоянная разделения переменных;

Общее решение уравнения (7) для произвольного k - го интервала непрерывности будет [2] иметь вид

$$Z_k(l) = A_k I_0[az_k(l)] + B_k Y_0[az_k(l)], \quad (10)$$

где A_k, B_k - произвольные постоянные;

I_0, Y_0 - функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка;

$z_k(l)$ - промежуточная переменная, вводимая для приведения уравнения (7) к уравнению Бесселя по правилу $z_k^2 = T_k(l)/\rho_k g$ [3],

а для $(k+1)$ - го интервала непрерывности

$$Z_{k+1}(l) = A_{k+1} I_0[az_{k+1}(l)] + B_{k+1} Y_0[az_{k+1}(l)]. \quad (11)$$

Соответственно полученным равенствам (10) и (11), условия сопряжения (9) принимают вид в L_k - той точке сопряжения k - го и $(k+1)$ - го интервалов непрерывности

$$A_{k+1} I_0[az_{k+1}(L_k)] + B_{k+1} Y_0[az_{k+1}(L_k)] = A_k I_0[az_k(L_k)] + B_k Y_0[az_k(L_k)], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &A_{k+1} I_1[az_{k+1}(L_k)] + B_{k+1} Y_1[az_{k+1}(L_k)] = \\ &= \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}} \{A_k I_1[az_k(L_k)] + B_k Y_1[az_k(L_k)]\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выведем рекуррентные формулы для форм собственных колебаний, как это делалось в [2], в общем виде.

Выразив из равенства (12) для первого условия сопряжения коэффициенты A_{k+1} через A_k, B_k, B_{k+1} , подставим его в выражение (13) для второго условия сопряжения. Второе условие сопряжения (13) даст нам, таким образом, возможность выразить коэффициенты B_{k+1} через коэффициенты A_k и B_k предыдущего интервала непрерывности. Подставив полученное выражение для B_{k+1} в выражение для A_{k+1} из первого условия сопряжения, по-

лучим искомые коэффициенты для функций форм собственных колебаний следующего интервала непрерывности

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k & \frac{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{I}_1(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})} + \\ & + \mathbf{B}_k \frac{\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{A}_k & \frac{\sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{I}_1(\mathbf{z}_k) - \mathbf{I}_0(\mathbf{z}_k)\mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})} + \\ & + \mathbf{B}_k \frac{\sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_k) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_k)}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k(\mathbf{L}_k)$, а $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1}(\mathbf{L}_k)$.

Тогда выражение для функции форм собственных колебаний $(k+1)$ интервала непрерывности принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k+1}(l) = & \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{I}_0(\mathbf{z}_k) + \mathbf{B}_k \mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_k)}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})} \left\{ \mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{I}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)] - \right. \\ & \left. - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)] \right\} + \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_k) + \mathbf{B}_k \mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_k)}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)] - \mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{I}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)] \right\} \cdot \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (14), (15) и (16) представляется возможным выразить коэффициенты для функции формы собственных колебаний n -ого последнего интервала непрерывности через коэффициенты формы собственных колебаний первого интервала непрерывности. Последние, в свою очередь, элементарным образом определяются из первого граничного условия (8):

$$\mathbf{B}_1 = -\mathbf{A}_1 \frac{\mathbf{I}_0[\mathbf{a}z_1(0)]}{\mathbf{Y}_0[\mathbf{a}z_1(0)]}. \quad (17)$$

Полученное выражение $\mathbf{Z}_n(l)$ подставляется во второе граничное условие (8). Так как в полученное выражение для второго граничного условия можно подставить из равенства (17) один из коэффициентов формы собственных колебаний выраженный через другой коэффициент первого интервала непрерывности, то, сократив последний в выражении для второго граничного условия, получим трансцендентное уравнение для определения собственного значения, которое и позволит определить значение частоты собственных колебаний рассматриваемой системы.

Рассматривая, в частности, систему с двумя интервалами непрерывности распределенных параметров и проведя соответствующее преобразования и выкладки, описанные выше, было получено следующие трансцендентное уравнение для определения собственных значений

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{I}_0(\xi \tilde{l}) \mathbf{Y}_0(\xi m) - \mathbf{I}_0(\xi m) \mathbf{Y}_0(\xi \tilde{l}) \right] \left\{ k \left[\mathbf{I}_1(\xi \tilde{l} n) \mathbf{Y}_0(\xi n) - \mathbf{I}_1(\xi n) \mathbf{Y}_1(\xi \tilde{l} n) \right] - \right. \\ & \left. - \xi n \left[\mathbf{I}_0(\xi n) \mathbf{Y}_1(\xi \tilde{l} n) - \mathbf{I}_1(\xi \tilde{l} n) \mathbf{Y}_0(\xi n) \right] \right\} + \left[\mathbf{I}_1(\xi \tilde{l}) \mathbf{Y}_0(\xi m) - \mathbf{I}_0(\xi m) \mathbf{Y}_1(\xi \tilde{l}) \right] \cdot \\ & \left\{ k \left[\mathbf{I}_1(\xi n) \mathbf{Y}_0(\xi \tilde{l} n) - \mathbf{I}_0(\xi \tilde{l} n) \mathbf{Y}_1(\xi n) \right] - \xi n \left[\mathbf{I}_0(\xi \tilde{l} n) \mathbf{Y}_0(\xi n) - \mathbf{Y}_0(\xi \tilde{l} n) \mathbf{I}_0(\xi n) \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

где ξ - переменная, определяемая равенством $\xi = \mathbf{a} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{P} - \mathbf{G}_L}{\rho_1 \mathbf{g}}}$;

k, \tilde{l}, m, n - коэффициенты, определяемые параметрами элементов рассматриваемой системы.

Собственные функции на каждом интервале непрерывности определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(\bar{l}) = & \mathbf{I}_0 \left\{ \xi \sqrt{1 - m_0 \left[1 - \frac{\tilde{n}_0(l_0 + 1)}{\tilde{n}_0 l_0 + 1} \bar{l} \right]} \right\} - \\ & - \frac{\mathbf{I}_0(\xi m)}{\mathbf{Y}_0(\xi m)} \mathbf{Y}_0 \left\{ \xi \sqrt{1 - m_0 \left[1 - \frac{\tilde{n}_0(l_0 + 1)}{\tilde{n}_0 l_0 + 1} \bar{l} \right]} \right\}, \end{aligned}$$

для $0 \leq \bar{l} \leq \frac{L_1}{L}$ и

$$z_2(\bar{l}) = \frac{I_0(\xi\tilde{l}) - \frac{I_0(\xi m)}{Y_0(\xi m)} \cdot Y_0(\xi\tilde{l})}{I_0(\xi\tilde{l}n)Y_1(\xi\tilde{l}n) - I_1(\xi\tilde{l}n)Y_0(\xi\tilde{l}n)} \left[I_0(\bar{l})Y_1(\xi\tilde{l}n) - I_1(\xi\tilde{l}n)Y_0(\bar{l}) \right] +$$

$$+ \frac{I_1(\xi\tilde{l}) - \frac{I_0(\xi m)}{Y_0(\xi m)} \cdot Y_1(\xi\tilde{l})}{I_0(\xi\tilde{l}n)Y_1(\xi\tilde{l}n) - I_1(\xi\tilde{l}n)Y_0(\xi\tilde{l}n)} \left[I_0(\xi\tilde{l}n)Y_0(\bar{l}) - Y_0(\xi\tilde{l}n)I_0(\bar{l}) \right],$$

для $\frac{L_1}{L} \leq \bar{l} \leq 1$,

где $\bar{l} = \frac{l_i}{L}$ - относительный текущий линейный параметр системы.

Таким образом, известная методика решения краевых задач теории колебания систем с непрерывно - дискретными параметрами с помощью нормальных фундаментальных систем расширена на решение одномерных краевых задач теории колебаний систем с континуально - дискретными параметрами, в которых фундаментальные системы не нормируются.

Аналитические выражения, получаемые в результате решения краевых задач теории колебаний систем с непрерывно - дискретными параметрами вышеизложенным способом, позволяют значительно упростить разработку инженерных методик определения частот и форм собственных колебаний рассматриваемого класса динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1968 г. - 724 с.
2. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. - М.: Наука, 1980 г. - 240 с.
3. Кухта К.Я., Кравченко В.П., Красношарпа В.А. Качественная теория управляемых динамических систем с непрерывно - дискретными параметрами. - Киев: Наукова думка, 1986 г. - 224 с.