УДК 681.3.01:533.6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

А.Н. Маркин, Б.В. Остроумов
(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

В статье приводится аналитическое решение частной одномерной краевой задачи теории колебаний систем с непрерывно - дискретными параметрами.

Решения краевых задач теории колебаний сводятся, по существу, к определению собственных значений, связанных с собственными частотами или другими параметрами исследуемой системы, и нахождению собственных функций (форм колебаний). Если собственные значения и собственные функции найдены, тогда можно считать краевую задачу решенной [1].

Универсальным методом решения одномерных краевых задач теории колебаний систем с непрерывными, непрерывно - дискретными и кусочно - непрерывными параметрами является метод, основанный на применении нормальных фундаментальных систем, позволяющий получить конечные выражения в аналитической форме [2].

В то же время математические модели достаточно широкого класса механических систем с распределенными параметрами содержат уравнения динамики, фундаментальные системы которых не нормируются.

Рассмотрим, например, одномерную краевую задачу о малых свободных колебания однородной нерастяжимой нити с закрепленным нижним концом, несущую на верхнем конце дискретную массу $\mathbf{m}_\Gamma$ и удерживаемую вертикально - тянущим усилием $\overline{\mathbf{P}}$ в положении близком в вертикальному (так называемого "перевернутого" маятника) (рис.1).

Математическая модель рассматриваемой задачи, составленная в рамках допущений принятых в [3], имеет следующий вид. Найти решение уравнения движения нити

$$\rho(l)\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \mathbf{t}^2} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\mathbf{T}(l)\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial l}\right], \tag{1}$$

где $\rho(l)$ - линейная плотность нити;

X(*l*t) - горизонтальные отклонения точек нити от вертикали;

T(*l*) - закон изменения натяжения по длине нити;

l -ось равновесного положения нити,
удовлетворяющее граничным условиям, соответственно, закрепленного нижнего и свободного верхнего (рис.2) концов нити

$$\mathbf{X(0,\ t)=0},\qquad \frac{\partial^2 \mathbf{X}(\mathbf{L},\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}^2}+\mathbf{g}(\mathbf{k}_0-\mathbf{1})\cdot\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{L},\mathbf{t})}{\partial l}=\mathbf{0}, \qquad (2)$$

где **L** - длина нити;

$\mathbf{k_0}$ - относительная нагрузка верхнего конца нити
и начальным условиям движения

$$\mathbf{X}(l,\ \mathbf{0})=\mathbf{f}(l),\qquad \frac{\partial \mathbf{X}(l,\mathbf{0})}{\partial \mathbf{t}}=\mathbf{F}(l). \qquad (3)$$

где **f(*l*)** и **F(*l*)** - функции, определяющие соответственно положение нити и скорости ее точек в начальный момент времени.

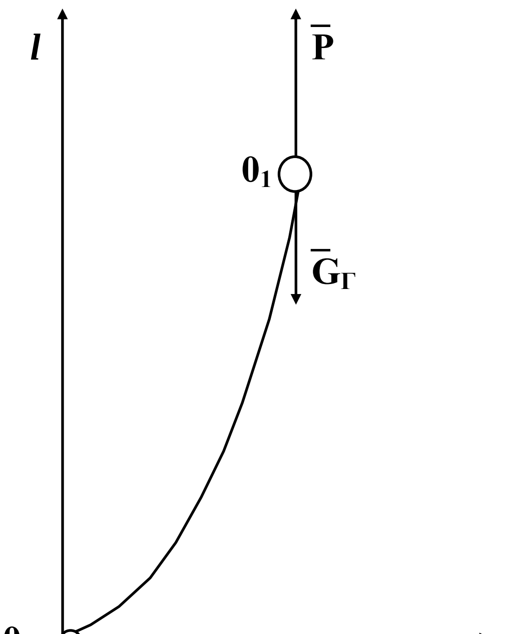

Рисунок 1 - "Перевернутый" маятник с постоянными непрерывными и дискретными параметрами

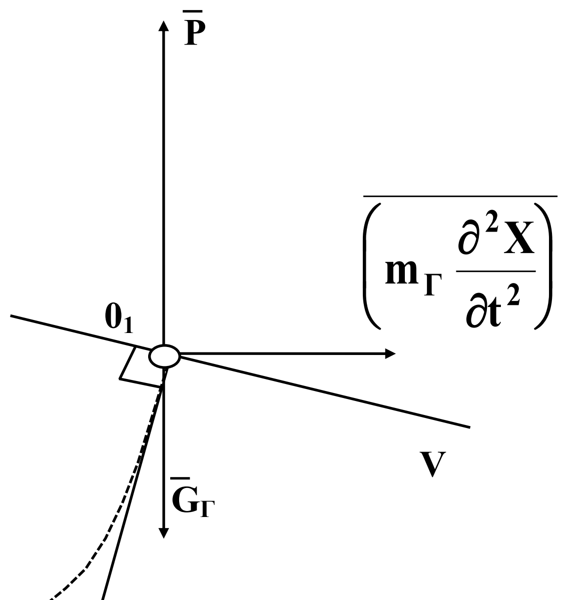

Рисунок 2 - Модель граничных условий верхнего конца нити

...астков (рис.3), где ее линейная плотность $\rho_i(l)$ сохраняет постоянные значения $\rho_i(l) = \mathbf{const} = \rho_i\ (\mathbf{i=1,2,\ ...k\ ...n})$.

Тогда для каждого $\mathbf{i}$ -го интервала непрерывности в рамках принятых в [3], допущений будет справедливо, с учетом (1) следующее одномерное уравнение

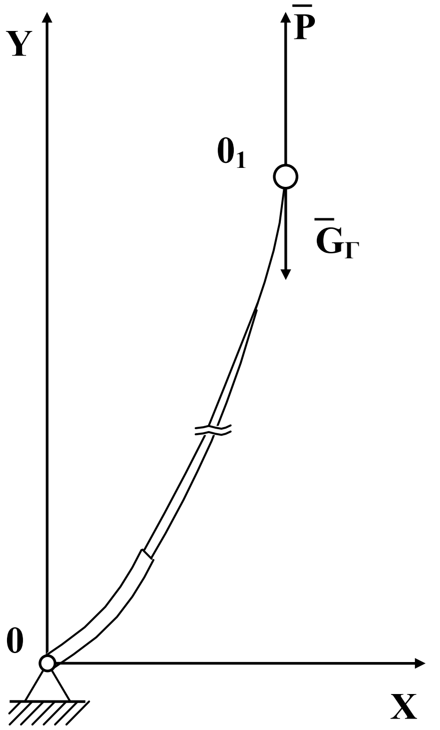

Рисунок 3 - "Перевернутый" маятник с постоянными кусочно - непрерывными и дис-кретными параметрами

$$\rho_i \frac{\partial^2 \mathbf{X_i}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\mathbf{T_i}(l)\frac{\partial \mathbf{X_i}}{\partial l}\right], \quad (4)$$

где $\mathbf{X_i}$ - горизонтальные отклонения точек $\mathbf{i}$ - го интервала от вертикали;

$\mathbf{T_i}(l)$ - закон изменения натяжения по длине $\mathbf{i}$ - го интервала нити,

решение которого должно удовлетворять условиям сопряжения на границах интервала:

$$\mathbf{X_{i+1}}(l_i, \mathbf{t}) = \mathbf{X_i}(l_i, \mathbf{t}), \quad (5)$$

$$\mathbf{T_{i+1}}(l_i)\mathbf{X'_{i+1}}(l_i, \mathbf{t}) = \mathbf{T_i}(l_i)\mathbf{X'_i}(l_i, \mathbf{t}). \quad (6)$$

После разделения переменных в уравнении (4) и условиях сопряжения (5) и (6), представляя $\mathbf{X}(l,\mathbf{t})=\mathbf{Z}(l,\mathbf{t}), \mathbf{S}(l,\mathbf{t})$ на основании (1), (2) и (3) приходим к граничной задаче на собственные значения и собственные функции для системы с кусочно - непрерывными и дискретными параметрами, которая формулируется следующим образом.

Найти решение уравнения

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}l}\left[\mathbf{T}(l)_i \frac{\mathbf{dZ_i}(l)}{\mathbf{d}l}\right] + \mathbf{a_i^2}\rho_i \mathbf{Z_i}(l) = \mathbf{0}, \quad (7)$$

удовлетворяющее граничным условиям на концах:

$$\begin{gathered} \mathbf{Z_1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{k_0} - \mathbf{1})\mathbf{Z'_n}(\mathbf{L}) - \mathbf{a_i^2}\mathbf{Z_n}(\mathbf{L}) = \mathbf{0} \end{gathered} \quad (8)$$

и условиям сопряжения на границах участков $l_i < l < l_{i+1}$:

$$\begin{gathered} Z_i(l_i)=Z_{i+1}(l_i), \\ T_i(l_i)Z_i'(l_i)=T_{i+1}(l_i)Z_{i+1}'(l_i), \end{gathered} \tag{9}$$

где $Z_i(l)$ - функция, зависящая только от текущей длины нити;

a - постоянная разделения переменных;

Общее решение уравнения (7) для произвольного k - го интервала непрерывности будет [2] иметь вид

$$Z_k(l)=A_k I_0[az_k(l)]+B_k Y_0[az_k(l)], \tag{10}$$

где A_k, B_k - произвольные постоянные;

I_0, Y_0 - функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка;

$z_k(l)$ - промежуточная переменная, вводимая для приведения уравнения (7) к уравнению Бесселя по правилу $z_k^2=T_k(l)/\rho_k g$ [3],

а для $(k+1)$ - го интервала непрерывности

$$Z_{k+1}(l)=A_{k+1} I_0[az_{k+1}(l)]+B_{k+1} Y_0[az_{k+1}(l)]. \tag{11}$$

Соответственно полученным равенствам (10) и (11), условия сопряжения (9) принимают вид в L_k - той точке сопряжения k - го и $(k+1)$ - го интервалов непрерывности

$$A_{k+1}I_0[az_{k+1}(L_k)]+B_{k+1}Y_0[az_{k+1}(L_k)]=A_kI_0[az_k(L_k)]+B_kY_0[az_k(L_k)], \tag{12}$$

$$\begin{gathered} A_{k+1}I_1[az_{k+1}(L_k)]+B_{k+1}Y_1[az_{k+1}(L_k)]= \\ =\sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\left\{A_kI_1[az_k(L_k)]+B_kY_1[az_k(L_k)]\right\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Выведем рекуррентные формулы для форм собственных колебаний, как это делалось в [2], в общем виде.

Выразив из равенства (12) для первого условия сопряжения коэффициенты A_{k+1} через A_k, B_k, B_{k+1}, подставим его в выражение (13) для второго условия сопряжения. Второе условие сопряжение (13) даст нам, таким образом, возможность выразить коэффициенты B_{k+1} через коэффициенты A_k и B_k предыдущего интервала непрерывности. Подставив полученное выражение для B_{k+1} в выражение для A_{k+1} из первого условия сопряжения, получим искомые коэффициенты для функций форм собственных колебаний следующего интервала непрерывности

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k \frac{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{I}_1(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})} + \\ + \mathbf{B}_k \frac{\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_k)\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})},\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{A}_k \frac{\sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{I}_1(\mathbf{z}_k) - \mathbf{I}_0(\mathbf{z}_k)\mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})} + \\ + \mathbf{B}_k \frac{\sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_k) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_k)}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})},\end{aligned} \tag{15}$$

где $\mathbf{z_k = z_k(L_k)}$, а $\mathbf{z_{k+1} = z_{k+1}(L_k)}$.

Тогда выражение для функции форм собственных колебаний **(k+1)** интервала непрерывности принимает следующий вид

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{k+1}(l) = \frac{\mathbf{A}_k\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_k) + \mathbf{B}_k\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_k)}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})}\left\{\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{I}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)] - \right. \\ \left. - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)]\right\} + \frac{\mathbf{A}_k\mathbf{I}_1(\mathbf{z}_k) + \mathbf{B}_k\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_k)}{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_1(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})} \times \\ \times \left\{\mathbf{I}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{Y}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)] - \mathbf{Y}_0(\mathbf{z}_{k+1})\mathbf{I}_0[\mathbf{z}_{k+1}(l)]\right\} \cdot \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}}.\end{aligned} \tag{16}$$

Используя (14), (15) и (16) представляется возможным выразить коэффициенты для функции формы собственных колебаний **n** - ого последнего интервала непрерывности через коэффициенты формы собственных колебаний первого интервала непрерывности. Последние, в свою очередь, элементарным образом определяются из первого граничного условия (8):

$$\mathbf{B_1 = -A_1 \frac{I_0\left[az_1(0)\right]}{Y_0\left[az_1(0)\right]}}. \tag{17}$$

Полученное выражение $\mathbf{Z_n(\mathit{l})}$ подставляется во второе граничное условие (8). Так как в полученное выражение для второго граничного условия можно подставить из равенства (17) один из коэффициентов формы собственных колебаний выраженный через другой коэффициент первого интервала непрерывности, то, сократив последний в выражении для второго граничного условия, получим трансцендентное уравнение для определения собственного значения, которое и позволит определить значение частоты собственных колебаний рассматриваемой системы.

Рассматривая, в частности, систему с двумя интервалами непрерывности распределенных параметров и проведя соответствующее преобразования и выкладки, описанные выше, было получено следующие трансцендентное уравнение для определения собственных значений

$$\begin{aligned}
&\left[I_0\left(\xi\tilde{l}\right)Y_0(\xi m) - I_0(\xi m)Y_0\left(\xi\tilde{l}\right)\right]\left\{k\left[I_1\left(\xi\tilde{l}n\right)Y_0(\xi n) - I_1(\xi n)Y_1\left(\xi\tilde{l}n\right)\right] - \right.\\
&\left.- \xi n\left[I_0(\xi n)Y_1\left(\xi\tilde{l}n\right) - I_1\left(\xi\tilde{l}n\right)Y_0(\xi n)\right]\right\} + \left[I_1\left(\xi\tilde{l}\right)Y_0(\xi m) - I_0(\xi m)Y_1\left(\xi\tilde{l}\right)\right]\cdot\\
&\left\{k\left[I_1(\xi n)Y_0\left(\xi\tilde{l}n\right) - I_0\left(\xi\tilde{l}n\right)Y_1(\xi n)\right] - \xi n\left[I_0\left(\xi\tilde{l}n\right)Y_0(\xi n) - Y_0\left(\xi\tilde{l}n\right)I_0(\xi n)\right]\right\} = 0,
\end{aligned}$$

где ξ- переменная, определяемая равенством $\mathbf{\xi = a \cdot \sqrt{\frac{P - G_л}{\rho_1 g}}}$;

$\mathbf{k, \tilde{l}, m, n}$ - коэффициенты, определяемые параметрами элементов рассматриваемой системы.

Собственные функции на каждом интервале непрерывности определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z_1(\bar{l})} &= \mathbf{I_0\left\{\xi\sqrt{1 - m_0\left[1 - \frac{\tilde{n}_0(l_0 + 1)}{\tilde{n}_0 l_0 + 1}\bar{l}\right]}\right\}} - \\
&\quad \mathbf{- \frac{I_0(\xi m)}{Y_0(\xi m)} Y_0\left\{\xi\sqrt{1 - m_0\left[1 - \frac{\tilde{n}_0(l_0 + 1)}{\tilde{n}_0 l_0 + 1}\bar{l}\right]}\right\}},
\end{aligned}$$

для $\mathbf{0 \le \bar{l} \le L_1/L}$ и

$$\mathbf{z}_2(\bar{l}) = \frac{\mathbf{I}_0(\xi\tilde{l}) - \dfrac{\mathbf{I}_0(\xi\mathbf{m})}{\mathbf{Y}_0(\xi\mathbf{m})}\cdot\mathbf{Y}_0(\xi\tilde{l})}{\mathbf{I}_0(\xi\tilde{l}\mathbf{n})\mathbf{Y}_1(\xi\tilde{l}\mathbf{n}) - \mathbf{I}_1(\xi\tilde{l}\mathbf{n})\mathbf{Y}_0(\xi\tilde{l}\mathbf{n})}\left[\mathbf{I}_0(\bar{l})\mathbf{Y}_1(\xi\tilde{l}\mathbf{n}) - \mathbf{I}_1(\xi\tilde{l}\mathbf{n})\mathbf{Y}_0(\bar{l})\right] +$$

$$+\frac{\mathbf{I}_1(\xi\tilde{l}) - \dfrac{\mathbf{I}_0(\xi\mathbf{m})}{\mathbf{Y}_0(\xi\mathbf{m})}\cdot\mathbf{Y}_1(\xi\tilde{l})}{\mathbf{I}_0(\xi\tilde{l}\mathbf{n})\mathbf{Y}_1(\xi\tilde{l}\mathbf{n}) - \mathbf{I}_1(\xi\tilde{l}\mathbf{n})\mathbf{Y}_0(\xi\tilde{l}\mathbf{n})}\left[\mathbf{I}_0(\xi\tilde{l}\mathbf{n})\mathbf{Y}_0(\bar{l}) - \mathbf{Y}_0(\xi\tilde{l}\mathbf{n})\mathbf{I}_0(\bar{l})\right],$$

для $\mathbf{L_1}/\mathbf{L} \le \bar{l} \le \mathbf{1}$,

где $\bar{l} = \dfrac{l_i}{\mathbf{L}}$ - относительный текущий линейный параметр системы.

Таким образом, известная методика решения краевых задач теории колебания систем с непрерывно - дискретными параметрами с помощью нормальных фундаментальных систем расширена на решение одномерных краевых задач теории колебаний систем с континуально - дискретными параметрами, в которых фундаментальные системы не нормируются.

Аналитические выражения, получаемые в результате решения краевых задач теории колебаний систем с непрерывно - дискретными параметрами вышеизложенным способом, позволяют значительно упростить разработку инженерных методик определения частот и форм собственных колебаний рассматриваемого класса динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1968 г. - 724 с.

2. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. - М.: Наука, 1980 г. - 240 с.

3. Кухта К.Я., Кравченко В.П., Красношапка В.А. Качественная теория управляемых динамических систем с непрерывно - дискретными параметрами. - Киев: Наукова думка, 1986 г. - 224 с.