УДК 533.5

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ В ОКОЛОЭКРАННОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

д.т.н. В.И. Холявко, В.В. Чмовж

На основе линейной теории изучается обтекание невязкой жидкостью тонкого профиля, расположенного на очень малом отстоянии от плоской твердой поверхности. Получены формы и характеристики оптимальных профилей.

При обтекании тонкого профиля, расположенного на очень малом отстоянии от плоской твердой поверхности аэродинамические характеристики определяются течением в узкой области между нижней поверхностью профиля и внешней границей.

Для коэффициента подъемной силы и момента тангажа относительно передней кромки профиля получены следующие выражения [1] :

$$C_{y_a} = C_{y_a}^{\alpha}\left(\alpha - \alpha_0\right), \quad m_z = m_{z_0} + m_z^{C_{y_a}} C_{y_a},$$

$$C_{y_a}^{\alpha} = \frac{1}{h}, \;\; \alpha_0 = -2\int_0^1 y(x)dx, \;\; m_z^{C_{y_a}} = -\frac{1}{3}, \tag{1}$$

$$m_{z_0} = \frac{2}{3h}\int_0^1 y(x)(1-3x)dx,$$

где $y(x)$ - уравнение нижней поверхности профиля, $y(0) = y(1) = 0$, $\dot{y}^2(x) = (dy/dx)^2 << 1$, $0 \le x \le 1$, h - положение профиля относительно внешней границы, α - угол атаки, $h << 1$, $\alpha << 1$. Все линейные размеры отнесены к хорде, длина которой принята за единицу (рис. 1).

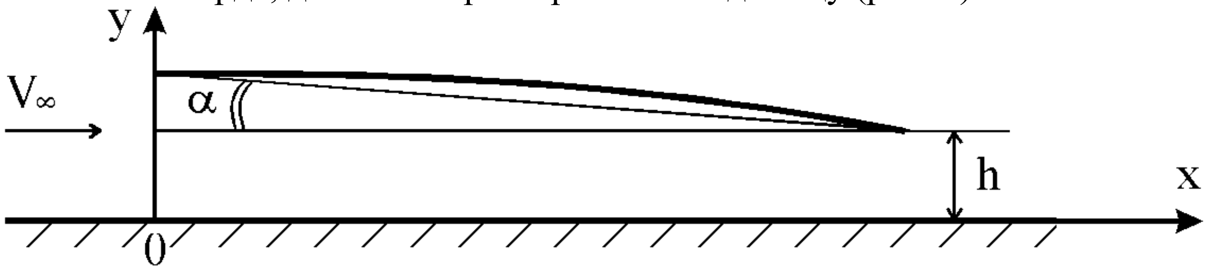

Рисунок 1 - Профиль в потоке

Введем дополнительные геометрические параметры:

$$\mathbf{p} = \int_0^1 \sqrt{1+\dot{y}^2(x)}dx \approx \int_0^1 \left[1+\left(\tfrac{1}{2}\right)\dot{y}^2(x)\right],$$
$$\mathbf{S} = \int_0^1 y(x)dx, \qquad q = \int_0^1 y^2(x)dx. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{p}$ - длина дуги контура нижней поверхности профиля, $\mathbf{S}$ - площадь, ограниченная нижней поверхностью и хордой, $\mathbf{q}$ - момент инерции контура относительно оси $\mathbf{OX}$ (хорды). Нетрудно заметить, что угол нулевой подъемной силы связан с параметром $\mathbf{S}$ равенством $\alpha_0 = -2S$.

Соотношения (1) и (2) позволяют сформулировать следующую вариационную задачу: определить форму профиля $y(x)$, которая реализует максимальную величину параметра $\mathbf{S}$ при заданных значениях m_{z_0}, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Значение параметра $\mathbf{p}$ эквивалентно условию постоянства сил трения на профиле, а параметра $\mathbf{q}$ - заданию жесткости на изгиб. Физически решение этой задачи дает наибольшее значение коэффициента подъемной силы при $\alpha = \mathrm{const}$, характеризующего несущие свойства профиля. Оптимальная форма профиля определяется из уравнения Эйлера [2] $F_y - \left(\tfrac{d}{dx}\right)F_{\dot{y}} = 0$ для основной функции $F(x, y, \dot{y}) = y + \mu_1(1-3x)y - \mu_2\sqrt{1+\dot{y}^2} + \mu_3 y^2$, где μ_i - постоянные множители Лагранжа. Знак минус перед множителем μ_2 поставлен из условия, чтобы при $\mu_2 > 0$ удовлетворялось условие Лежандра $F_{\dot{y}\dot{y}} < 0$, необходимо для получения максимума параметра $\mathbf{S}$. Множители Лагранжа и две постоянные интегрирования, которые появляются при решении уравнения Эйлера, находятся с помощью изопериметрических условий (2) и условий на концах профиля.

Приведем решение частных задач.

1. Задан параметр $\mathbf{p}$, множители Лагранжа $\mu_1 = \mu_3 = 0$. Уравнением оптимального профиля является дуга окружности

$$(x-0{,}5)^2 + \left(y + \sqrt{\mu_2{}^2 - 0{,}25}\right)^2 = \mu_2{}^2\,. \tag{3}$$

Множитель μ_2 определяется из уравнения $2\mu_2 \arcsin\left(1/2\mu_2\right) = p$.

Значение параметра S равно $S = \left(1/2\right)\mu_2 p - \left(1/4\right)\sqrt{4\mu_2^2 - 1}$.

Если учесть, что нижняя поверхность профиля мало отличается от хорды, а $\dot{y}^2 \ll 1$, $p \approx 1$, $\mu_2 \gg 1$, то приближенно будем иметь

$$y(x) = \left(1/2\mu_2\right)x(1-x),\ \mu_2 = \left[2\sqrt{6(p-1)}\right]^{-1},\ S = \left(1/6\right)\sqrt{6(p-1)}, \quad (4)$$

т.е. уравнением профиля является парабола.

На рис.2 показана форма оптимального профиля, полученная при расчете по формуле (4) для значения $p = 1.001$. Для данной формы профиля имеем следующие значения основных параметров: $q = 0.0002$, $S = 0.013$. Увеличение значения параметра p приводит к увеличению относительной вогнутости профиля.

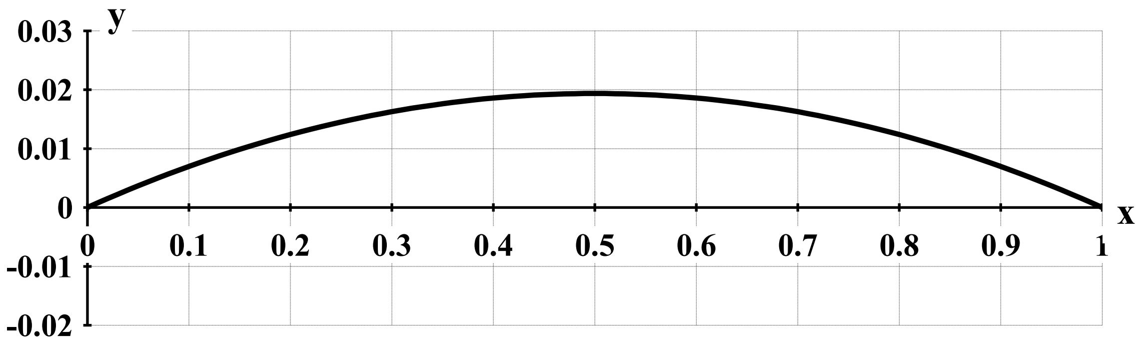

Рисунок 2 - Форма профиля (4)

2. Заданы параметры p и q, множитель Лагранжа $\mu_1 = 0$. Контур нижней поверхности оптимального профиля имеет форму

$$y(x) = \frac{1}{\mu_3 \cos\left(k/2\right)} \sin\left(k(1-x)/2\right) \sin\left(kx/2\right),\ \ k = \sqrt{2\mu_3/\mu_2}. \quad (5)$$

Уравнение (5) симметрично относительно середины хорды. Постоянные множители Лагранжа μ_2 и μ_3 находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{4\mu_3{}^2}\left[1 + \dfrac{1}{2\cos^2\left(k/2\right)} - \dfrac{3}{k}\,\mathrm{tg}\left(k/2\right)\right]; \\ p = 1 + \left[\dfrac{k^2}{16\mu_3{}^2\cos^2\left(k/2\right)}\right]\left[1 - \dfrac{1}{k}\sin k\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Значение параметра S равно $S = \dfrac{1}{2\mu_3}\left[\dfrac{2}{k}\,\mathrm{tg}\left(k/2\right) - 1\right]$.

Отметим, решение (5) с достаточной точностью соответствует решению (4). Форма профиля в большей степени зависит от параметра p. Параметр q достаточно слабо влияет на форму профиля. При решении системы уравнений (6) значение параметра k не должно превышать величины π $(0 < k < \pi)$.

3. Заданы параметры m_{z_0} и p, множитель Лагранжа $\mu_3 = 0$. Форма оптимального профиля определяется уравнением

$$y(x) = \frac{1}{2\mu_2}x(1 - x)(1 - \mu_1 x). \tag{7}$$

Постоянные множители Лагранжа μ_1 и μ_2 определяются следующими зависимостями

$$\mu_1 = \frac{5}{4}\left[1 + 9hm_{z_0}\sqrt{2/5A}\right],\ \ \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{40A}},$$
$$A = \frac{8}{5}(p-1) - 54h^2m_{z_0}^2. \tag{8}$$

Значение параметра S равно $S = \dfrac{1}{24\mu_2}(2 - \mu_1)$.

Для реализации оптимального профиля коэффициент A должен быть положительным. Из этого следует зависимость между параметрами m_{z_0} и p: $p > 1 + \dfrac{135}{4}h^2m_{z_0}^2$.

Примечательно, что если $\mu_1 = 2$, то угол нулевой подъемной силы $\alpha_0 = 0$, а профиль (7) имеет S-образную форму с точечной симметрией относительно середины хорды. В общем случае S-образность профиля сохраняется при любых значениях $\mu_1 > 1$. При $\mu_1 = 0$ формой оптимального профиля будет являться парабола.

На рис. 3. представлены формы оптимальных профилей для уравнения (7) в зависимости от значений m_{z_0} и h (табл. 1) при постоянном значении параметра $p = 1.001$.

Анализируя полученные решения можно сделать следующие заключения. При значении параметра $p \to 1$ уравнение формы профиля $y(x) \equiv 0$, что соответствует прямой линии. При постоянном значении h точка пересе-

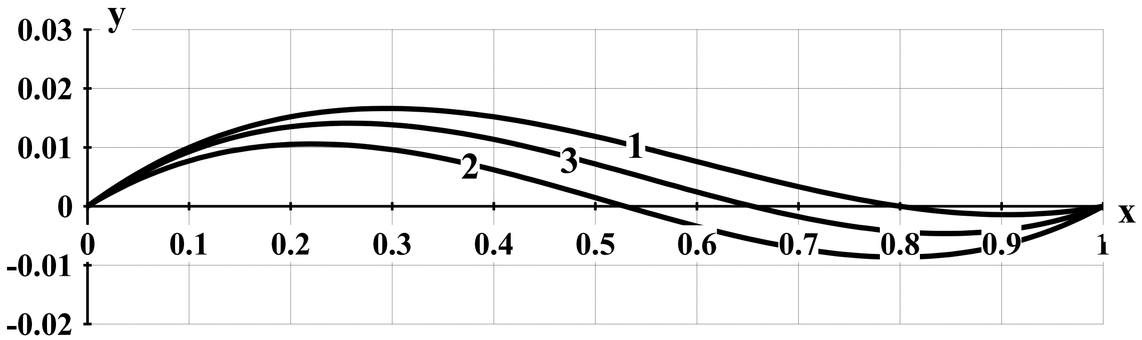

Рисунок 3 - Форма профиля (7)

Таблица 1 – Расчетные значения

Вариант решения (8)		
1	**2**	**3**
$m_{z_0} = 0, \ h = 0.1$	$m_{z_0} = 0.3, \ h = 0.1$	$m_{z_0} = 0.3, \ h = 0.05$
Значения основных параметров:		
$S = 0.0079$ $q = 0.0001$	$S = 0.00097$ $q = 4.84 \cdot 10^{-5}$	$S = 0.0048$ $q = 6.86 \cdot 10^{-5}$

чения линии профиля с хордой x_s стремится: - к носку профиля $(0 \le x_s \le 0.8)$ для положительных значений $m_{z_0} > 0$; - к задней точке $(0.8 \le x_s \le 1)$ для $m_{z_0} < 0$. При любых значениях $m_{z_0} \ne 0$ уменьшение отстояния профиля от твердой границы $(h \to 0)$ приводит к смещению точки x_s к задней точке профиля $(x_s \to 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Холявко В.И. Некоторые задачи околоэкранной аэродинамики. – В кн: Научно-методические материалы по прикладным задачам аэромеханики. - Харьков: ХВВАИУ, 1987, вып. II. – С. 5 - 14.

2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М: Физматгиз, 1962. – 290 с.