

## ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ В ОКОЛОЭКРАННОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

д.т.н. В.И. Холявко, В.В. Чмовж

На основе линейной теории изучается обтекание невязкой жидкостью тонкого профиля, расположенного на очень малом отстоянии от плоской твердой поверхности. Получены формы и характеристики оптимальных профилей.

При обтекании тонкого профиля, расположенного на очень малом отстоянии от плоской твердой поверхности аэродинамические характеристики определяются течением в узкой области между нижней поверхностью профиля и внешней границей.

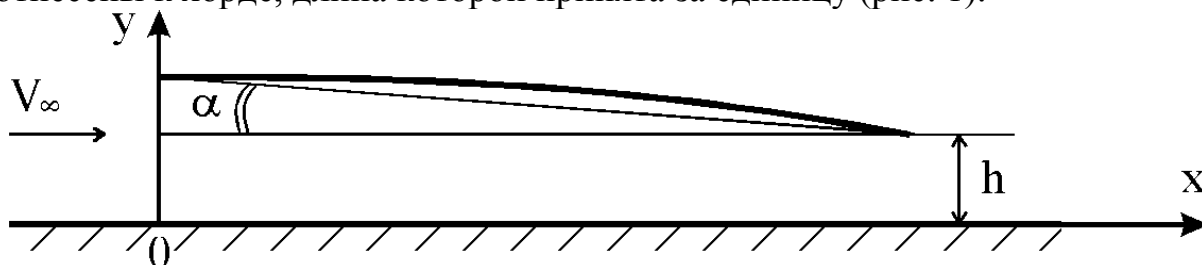
Для коэффициента подъемной силы и момента тангажа относительно передней кромки профиля получены следующие выражения [1]:

$$C_{y_a} = C_{y_a}^\alpha (\alpha - \alpha_0), \quad m_z = m_{z_0} + m_z^{C_{y_a}} C_{y_a},$$

$$C_{y_a}^\alpha = \frac{1}{h}, \quad \alpha_0 = -2 \int_0^1 y(x) dx, \quad m_z^{C_{y_a}} = -\frac{1}{3}, \quad (1)$$

$$m_{z_0} = \frac{2}{3h} \int_0^1 y(x)(1-3x) dx,$$

где  $y(x)$  - уравнение нижней поверхности профиля,  $y(0) = y(1) = 0$ ,  $\dot{y}^2(x) = (dy/dx)^2 \ll 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h$  - положение профиля относительно внешней границы,  $\alpha$  - угол атаки,  $h \ll 1$ ,  $\alpha \ll 1$ . Все линейные размеры отнесены к хорде, длина которой принята за единицу (рис. 1).



© д.т.н. В.И. Холявко, В.В. Чмовж, 1998

## Рисунок 1 - Профиль в потоке

Введем дополнительные геометрические параметры:

$$\begin{aligned} p &= \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)} dx \approx \int_0^1 \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \dot{y}^2(x) \right], \\ S &= \int_0^1 y(x) dx, \quad q = \int_0^1 y^2(x) dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $p$  - длина дуги контура нижней поверхности профиля,  $S$  - площадь, ограниченная нижней поверхностью и хордой,  $q$  - момент инерции контура относительно оси  $OX$  (хорды). Нетрудно заметить, что угол нулевой подъемной силы связан с параметром  $S$  равенством  $\alpha_0 = -2S$ .

Соотношения (1) и (2) позволяют сформулировать следующую вариационную задачу: определить форму профиля  $y(x)$ , которая реализует максимальную величину параметра  $S$  при заданных значениях  $m_{z_0}$ ,  $p$  и  $q$ .

Значение параметра  $p$  эквивалентно условию постоянства сил трения на профиле, а параметра  $q$  - заданию жесткости на изгиб. Физически решение этой задачи дает наибольшее значение коэффициента подъемной силы при  $\alpha = \text{const}$ , характеризующего несущие свойства профиля. Оптимальная форма профиля определяется из уравнения Эйлера [2]  $F_y - \left(\frac{d}{dx}\right)F_{\dot{y}} = 0$

для основной функции  $F(x, y, \dot{y}) = y + \mu_1(1 - 3x)y - \mu_2\sqrt{1 + \dot{y}^2} + \mu_3y^2$ , где  $\mu_i$  - постоянные множители Лагранжа. Знак минус перед множителем  $\mu_2$  поставлен из условия, чтобы при  $\mu_2 > 0$  удовлетворялось условие Лежандра  $F_{\dot{y}\dot{y}} < 0$ , необходимо для получения максимума параметра  $S$ .

Множители Лагранжа и две постоянные интегрирования, которые появляются при решении уравнения Эйлера, находятся с помощью изопериметрических условий (2) и условий на концах профиля.

Приведем решение частных задач.

1. Задан параметр  $p$ , множители Лагранжа  $\mu_1 = \mu_3 = 0$ . Уравнением оптимального профиля является дуга окружности

$$(x - 0,5)^2 + \left(y + \sqrt{\mu_2^2 - 0,25}\right)^2 = \mu_2^2. \tag{3}$$

Множитель  $\mu_2$  определяется из уравнения  $2\mu_2 \arcsin\left(\frac{1}{2\mu_2}\right) = p$ .

Значение параметра  $S$  равно  $S = \left(\frac{1}{2}\right)\mu_2 p - \left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{4\mu_2^2 - 1}$ .

Если учесть, что нижняя поверхность профиля мало отличается от хорды, а  $\dot{y}^2 \ll 1$ ,  $p \approx 1$ ,  $\mu_2 \gg 1$ , то приближенно будем иметь

$$y(x) = \left(\frac{1}{2\mu_2}\right)x(1-x), \quad \mu_2 = \left[2\sqrt{6(p-1)}\right]^{-1}, \quad S = \left(\frac{1}{6}\right)\sqrt{6(p-1)}, \quad (4)$$

т.е. уравнением профиля является парабола.

На рис.2 показана форма оптимального профиля, полученная при расчете по формуле (4) для значения  $p = 1.001$ . Для данной формы профиля имеем следующие значения основных параметров:  $q = 0.0002$ ,  $S = 0.013$ . Увеличение значения параметра  $p$  приводит к увеличению относительной вогнутости профиля.

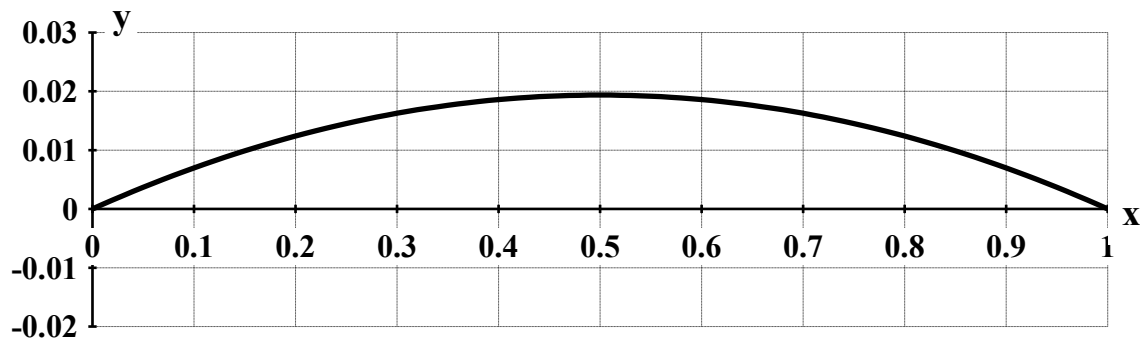


Рисунок 2 - Форма профиля (4)

2. Заданы параметры  $p$  и  $q$ , множитель Лагранжа  $\mu_1 = 0$ . Контур нижней поверхности оптимального профиля имеет форму

$$y(x) = \frac{1}{\mu_3 \cos\left(\frac{k}{2}\right)} \sin\left(\frac{k(1-x)}{2}\right) \sin\left(\frac{kx}{2}\right), \quad k = \sqrt{\frac{2\mu_3}{\mu_2}}. \quad (5)$$

Уравнение (5) симметрично относительно середины хорды. Постоянные множители Лагранжа  $\mu_2$  и  $\mu_3$  находятся из системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{1}{4\mu_3^2} \left[ 1 + \frac{1}{2\cos^2(k/2)} - \frac{3}{k} \operatorname{tg}(k/2) \right]; \\ p = 1 + \left[ \frac{k^2}{16\mu_3^2 \cos^2(k/2)} \right] \left[ 1 - \frac{1}{k} \sin k \right]. \end{array} \right. \quad (6)$$

Значение параметра  $S$  равно  $S = \frac{1}{2\mu_3} \left[ \frac{2}{k} \operatorname{tg}(k/2) - 1 \right]$ .

Отметим, решение (5) с достаточной точностью соответствует решению (4). Форма профиля в большей степени зависит от параметра  $p$ . Параметр  $q$  достаточно слабо влияет на форму профиля. При решении системы уравнений (6) значение параметра  $k$  не должно превышать величины  $\pi$  ( $0 < k < \pi$ ).

3. Заданы параметры  $m_{z_0}$  и  $p$ , множитель Лагранжа  $\mu_3 = 0$ . Форма оптимального профиля определяется уравнением

$$y(x) = \frac{1}{2\mu_2} x(1-x)(1-\mu_1 x). \quad (7)$$

Постоянные множители Лагранжа  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяются следующими зависимостями

$$\mu_1 = \frac{5}{4} \left[ 1 + 9hm_{z_0} \sqrt{2/5A} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{40A}}, \quad (8)$$

$$A = \frac{8}{5} (p-1) - 54h^2 m_{z_0}^2.$$

Значение параметра  $S$  равно  $S = \frac{1}{24\mu_2} (2 - \mu_1)$ .

Для реализации оптимального профиля коэффициент  $A$  должен быть положительным. Из этого следует зависимость между параметрами  $m_{z_0}$  и

$$p: p > 1 + \frac{135}{4} h^2 m_{z_0}^2.$$

Примечательно, что если  $\mu_1 = 2$ , то угол нулевой подъемной силы  $\alpha_0 = 0$ , а профиль (7) имеет  $S$ -образную форму с точечной симметрией относительно середины хорды. В общем случае  $S$ -образность профиля сохра-

няется при любых значениях  $\mu_1 > 1$ . При  $\mu_1 = 0$  формой оптимального профиля будет являться парабола.

На рис. 3. представлены формы оптимальных профилей для уравнения (7) в зависимости от значений  $m_{z_0}$  и  $h$  (табл. 1) при постоянном значении параметра  $p = 1.001$ .

Анализируя полученные решения можно сделать следующие заключения. При значении параметра  $p \rightarrow 1$  уравнение формы профиля  $y(x) \equiv 0$ , что соответствует прямой линии. При постоянном значении  $h$  точка пере-

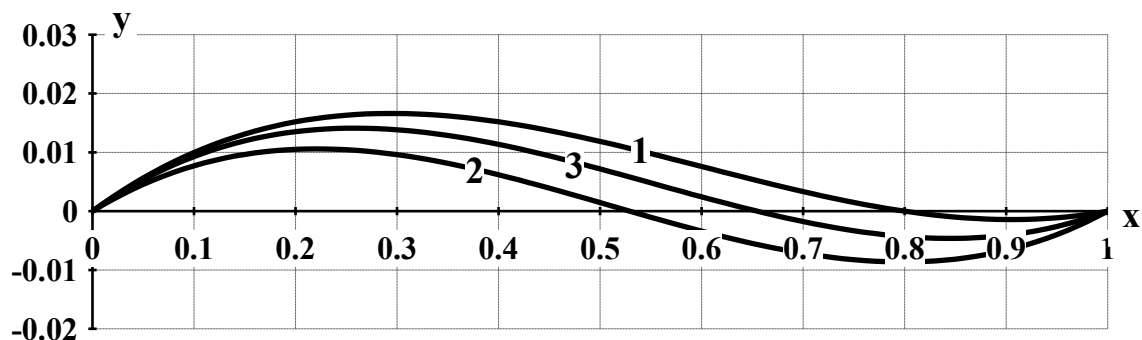


Рисунок 3 - Форма профиля (7)

Таблица 1 – Расчетные значения

Вариант решения (8)		
1	2	3
$m_{z_0} = 0, h = 0.1$	$m_{z_0} = 0.3, h = 0.1$	$m_{z_0} = 0.3, h = 0.05$
Значения основных параметров:		
$S = 0.0079$	$S = 0.00097$	$S = 0.0048$
$q = 0.0001$	$q = 4.84 \cdot 10^{-5}$	$q = 6.86 \cdot 10^{-5}$

чения линии профиля с хордой  $x_s$  стремится: - к носку профиля ( $0 \leq x_s \leq 0.8$ ) для положительных значений  $m_{z_0} > 0$ ; - к задней точке ( $0.8 \leq x_s \leq 1$ ) для  $m_{z_0} < 0$ . При любых значениях  $m_{z_0} \neq 0$  уменьшение отстояния профиля от твердой границы ( $h \rightarrow 0$ ) приводит к смещению точки  $x_s$  к задней точке профиля ( $x_s \rightarrow 1$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Холявко В.И. Некоторые задачи околоэкранный аэродинамики. – В кн: Научно-методические материалы по прикладным задачам аэромеханики. - Харьков: ХВВАИУ, 1987, вып. II. – С. 5 - 14.
2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М: Физматгиз, 1962. – 290 с.