УДК 531.395

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АГРЕГАТОВ ДЛЯ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

проф. В.А. Прокопов, В.А. Табуненко

В статье рассматриваются некоторые вопросы моделирования динамики агрегатов для транспортирования летательных аппаратов, заполненных жидким топливом.

Транспортирование летательных аппаратов (ЛА) осуществляется по дорогам различных категорий. Оно сопряжено с возникновением динамических нагрузок, действующих на аппарат. Известно, что их величина оценивается коэффициентом перегрузки, а его максимальное значение не должно превышать наперед заданного. Это ограничивает скорость движения транспортного агрегата и тем сильнее, чем ниже качество дороги.

Как правило, агрегаты для транспортирования летательных аппаратов выполняются многоосными с мягкой индивидуальной подвеской колес всех осей или на гусеничном ходу и имеют жесткую раму, большой вес, а летательные аппараты легкую и весьма деформативную конструкцию [1].

В случае, когда транспортируется "сухой" (без топлива) ЛА, агрегат с ЛА представляет собой сложную пространственную колебательную систему, в которой элементы имеют распределенные массовые и упругие свойства. При движении агрегата по дороге с периодическими неровностями возможно возникновение резонансов и больших динамических нагрузок. Их оценка представляет известные трудности, так как необходимо иметь систему дифференциальных уравнений в частных производных, вида [1]

$$\mathbf{EI(X)\cdot\frac{\partial^4 Y}{\partial X^4}+m(x)\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}=0},$$

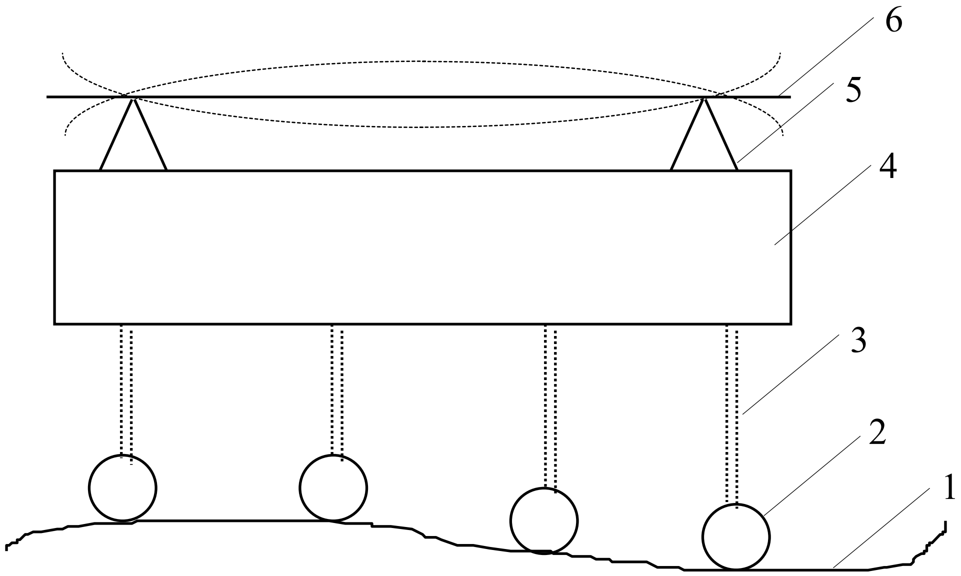
где $\mathbf{X}$ - координата вдоль продольной оси деформируемого элемента;

$\mathbf{y(x\cdot\tau)}$ - поперечный прогиб элемента;

$\boldsymbol{\tau}$ - время;

m(x) - распределение массы элемента.

Упрощение возможно на путях ограничения числа учитываемых форм колебаний элементов и распределения колебаний в продольной и поперечных полостях с последующим сложением полученных величин нагрузок. Колебательная плоская система (в продольной плоскости) может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1.

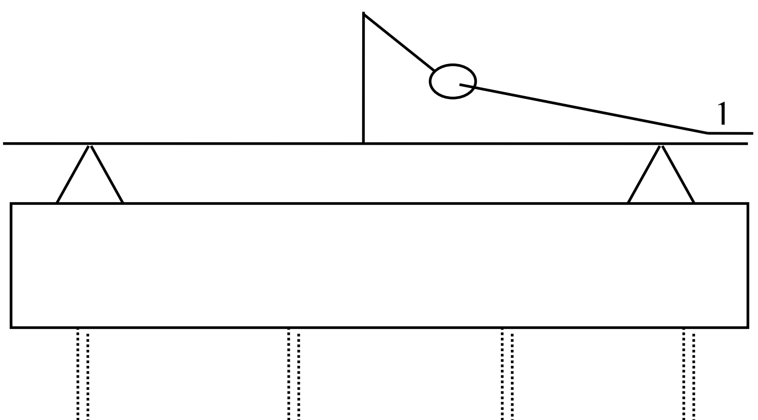


1 - дорога с неровностями; 4 - рама агрегата;
2 - колеса; 5 - опоры ЛА;
3 - подвеска колеса; 6 - ЛА.

Рисунок 1 - Колебательная плоская система

В случае, когда транспортируется заправленный ЛА, колебательная система резко усложняется за счет колебания жидкости. Возможно появление параметрических колебаний и резкое повышение динамических нагрузок на ЛА. При возникновении параметрического резонанса может даже возникнуть вопрос о динамической устойчивости агрегата в поперечной плоскости. Если считать, что жидкость в баках колеблется синфазно по одной форме, то ее можно заменить маятником с определенной длиной и массой (рис.2).

Рассмотрим подробнее этот случай при весьма простых предположения, не изменяющих суть дела.



Будем считать, что рама с агрегатом абсолютно жесткие, колеблются на подвеске, совершая возвратно - поступательное движение. Тогда физическая модель колебательной системы имеет вид, представленный на рис. 3, на котором введены следующие обозначения: 1 - дорога, 2 - подвеска всего агрегата, 3 - масса рамы $\mathbf{M}$, 4 - ЛА, 5 - жидкость, $\mathbf{Z_m}$ - ось отсчета перемещений массы $\mathbf{M}$ (от положения статистического равновесия), $\mathbf{c}$ - жесткость подвески всего агрегата, $\mathbf{m}$ -масса колеблющейся жидкости, $\mathbf{L}$ - длина маятника, $\mathbf{u = a \cdot \cos\nu\tau}$ - изменение неровностей дороги, $\boldsymbol{\nu}$ - частота изменений неровностей, $\boldsymbol{\varphi}$ - угол отклонения маятника при колебаниях.

Обращает на себя внимание тот факт, что точка $\mathbf{O}$ подвеса маятника движется вертикально, поэтому закон ее движения будет коэффициентом при координате $\boldsymbol{\varphi}$ и могут иметь место параметрические колебания.

Покажем это, для чего составим математическую модель процесса. Воспользуемся уравнением Лагранжа 2 - го рода в форме

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d\tau}}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial \mathbf{q}},$$

где $\mathbf{T}$ и $\boldsymbol{\Pi}$ - соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, $\mathbf{q}$ - обобщенная координата, $\dot{\mathbf{q}}$ - обобщенная скорость.

Запишем выражение для $\mathbf{T}$ и $\boldsymbol{\Pi}$ через координаты и параметры системы:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{M} + \mathbf{m}) \cdot \frac{\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}}^{2}}{2} + \frac{\mathbf{m}}{2}(\mathbf{l} \cdot \dot{\varphi}) + \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{l} \cdot \varphi \cdot \sin\varphi;$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{c} \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{Z_m})^2}{2} + \mathbf{mgl} \cdot (1 - \cos\varphi).$$

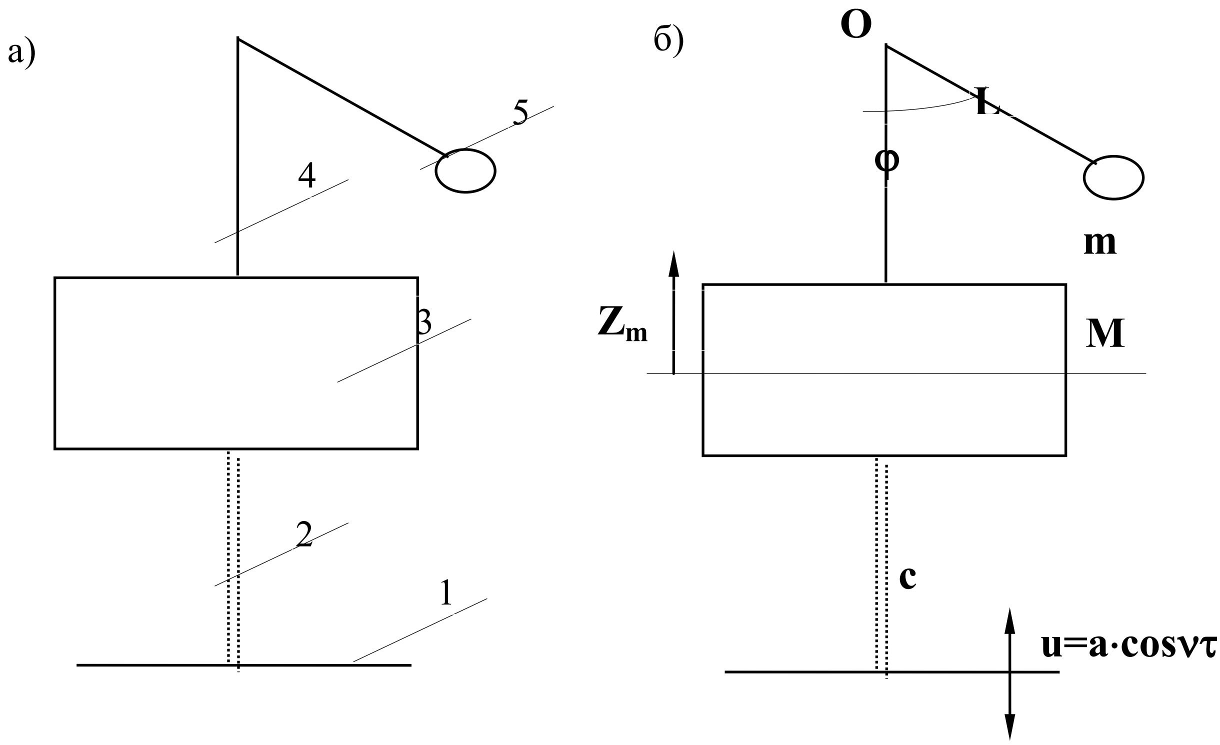


Рисунок 3 - Модель колебательной системы

Использовав уравнение Лагранжа для координат $\mathbf{Z_m}$ и $\boldsymbol{\varphi}$, получим систему уравнений, описывающую процесс колебаний масс $\mathbf{M}$ и $\mathbf{m}$:

$$\left(\mathbf{M}+\mathbf{m}\right)\cdot\ddot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}}+\mathbf{c}\mathbf{Z}_{\mathbf{m}}+\mathbf{m}\cdot\mathbf{L}\cdot\ddot{\varphi}\cdot\sin\varphi+\mathbf{m}\cdot\mathbf{L}\cdot\dot{\varphi}^{2}\cdot\cos\varphi=\mathbf{c}\cdot\mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{L}}\left(1+\frac{\ddot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}}}{\mathbf{q}}\right)\cdot\sin\varphi=0\ . \quad (2)$$

Начальные условия:

$\mathbf{Z_m}(0)=\dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}}(0)$ и $\varphi(0)=0, \dot{\varphi}(0)\neq 0$ или $\varphi(0)\neq 0, \dot{\varphi}(0)=0$.

Функция $\mathbf{u}=\mathbf{a}\cdot\cos\nu\tau$.

Колебания системы возникают от возмущения $\mathbf{u}$ и начального условия для φ или $\dot{\varphi}$. Математическая модель $\mathbf{u}$ при больших и при малых значениях φ нелинейна.

Однако в уравнении (1) третий и четвертый члены при малом отношении $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{M}}$ по абсолютной величине могут быть существенно меньше, чем первый и второй. Тогда система станет линейной и будет совершать вынужденное или свободное движения. Основным параметром станет собственная частота $\omega^2 = \dfrac{c}{M+m}$.

Тогда, в зависимости от соотношения ω и ν, возможно движение массы M по закону $Z_m = A \cdot \cos\omega\tau$.

В этом случае уравнение (2) при малых φ ($\sin\varphi \cong \mu$) превращается в уравнение с периодическим коэффициентом [3]

$$\ddot{\varphi} + p^2\left(1 - \mu \cdot \cos\omega\tau\right) \cdot \varphi = 0.$$

В данном уравнении $p^2 = \dfrac{q}{L}, \mu = \dfrac{A \cdot \omega^2}{q}$.

Это уравнение описывает параметрические колебания и представляет собой известное уравнение Матье, решение которого можно записать в виде

$$\varphi = c_1 e^{r\tau} \cdot \varepsilon(\tau) + c_2 e^{-r\tau} \cdot \varepsilon(-\tau),$$

где r - функция параметров μ и p,

$\varepsilon(\tau)$ - периодическая функция времени τ.

При r чисто мнимом решении φ - периодические, при наличии у r вещественной части φ неограниченно возрастает. Со временем имеет место параметрический резонанс. Так как r зависит от соотношения μ и p, области параметрического резонанса определяются параметрами μ и p.

В заключении следует отметить, что даже в этом "простом" случае нелинейность математической модели существенно усложняет прогнозирование параметрических колебаний и построение области параметрического резонанса, в то время как и практика транспортирования заправленных ЛА делает такую задачу актуальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурда С.Н. и др. Динамика транспортных агрегатов. - Харьков: ХВУ, 1996. - 89 с.

2. Каудерер Г. Нелинейная механика. - М.: Изд. иностр. лит., 1961. - 328 с.