УДК 681.51

ОБРАБОТКА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ТРАНСФОРМАЦИЯХ

к.т.н. В.П. Машталир, к.т.н. А.В. Орлов
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

Рассматривается задача анализа динамики объектов на основе исследования параметров геометрических преобразований их изображений.

Пусть $\mathbf{B_t}$ - изображение некоторого движущегося объекта в момент времени $\mathbf{t}$. Изображение $\mathbf{B_0}$, полученное в начальный момент времени, считаем эталонным. В зависимости от характера возможных перемещений объекта изображения $\mathbf{B_t}$ эквивалентны изображению $\mathbf{B_0}$ относительно действия той или иной группы геометрических преобразований плоскости. Обозначим эту группу $\mathbf{G}$. Тогда эквивалентность $\mathbf{B_t}$ и $\mathbf{B_0}$ означает, что в каждый момент времени $\mathbf{t}$ существует преобразование координат $\mathbf{g_t \in G}$, $\mathbf{g_t : x \to h_1(x,y,t),\ y \to h_2(x,y,t)}$, которое переводит изображение $\mathbf{B_0}$ в изображение $\mathbf{B_t}$: $\mathbf{B_t = g_t\ B_0 = B_0(h_1(x,y,t), h_2(x,y,t))}$. Зная $\mathbf{g_t}$, легко найти обратное преобразование $\mathbf{(g_t)^{-1}}$. Такое преобразование нормализует изображение $\mathbf{B_t}$. Процедуры нормализации позволяют сводить распознавание изображений к сравнению с эталоном, а знание параметров группы преобразований дает возможность отслеживать перемещения объектов.

В работе рассмотрен случай, когда $\mathbf{G}$ - группа аффинных преобразований: $\mathbf{x \to a_1x+b_1y+c_1,\ y \to a_2x+b_2y+c_2,\ a_1b_2-a_2b_1 \neq 0}$, где $\mathbf{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2}$ - параметры преобразований.

Существует различные способы нахождения преобразования $\mathbf{g_t}$ для фиксированного момента времени $\mathbf{t}$. Это, в первую очередь, методы последовательной и параллельной нормализации. Однако, время реализации этих методов не позволяет для реальных задач пользоваться ими для каждого очередного момента времени. В связи с этим необходимо тем или иным образом осуществлять прогноз движения, то есть находить g_t при $t>t_0$ по информации о g_t , при $t\le t_0$ без решения задачи нормализации относительно шестипараметрической афинной группы.

Обычно любая последовательность изображений реального движущегося объекта обладает тем свойством, что существует последовательность однопараметрических подгрупп $G_1,G_2,\ldots,G_k,\ldots$ и последовательность временных дискретов $t_1,\ldots,t_k,\ldots$ таких, что изображения $B_{t'}$ и $B_{t''}$ эквивалентны относительно действия G_k при $t_k\le t', t''\le t_k$. Другими словами, многопараметрическое управление движением обычно разбивается в последовательность однопараметрических. Например, при движении вдоль ломаной: G_k - группы смещений вдоль фиксированных прямых, t_k - время прохождения изломов. Возможны и гораздо более сложные преобразования, когда отдельные однопараметрические группы нельзя непосредственно записать аналитически.

Допустим, что известны моменты времени $t_1,t_2,\ldots$ смены действия однопараметрических подгрупп. Покажем, как можно нормализовать последовательность изображений B_t, решая задачу об эквивалентности лишь столько раз, сколько раз однопараметрическая подгруппа сменяется другой в течение исследуемого отрезка времени $[0,T]$. Для этого достаточно указать способ получения всех g_t при $0 \le t \le t_1$ путем однократного решения задачи об эквивалентности относительно афинной группы. Пусть g_1 - преобразование, связывающее эталон B_0 и изображение B_t в момент времени $t=1$, - найдено в результате решения задачи об эквивалентности. Покажем, как найти g_t при $0\le t\le t_1$.

Пусть G_1 - однопараметрическая подгруппа группы афинных преобразований $A_{ff}(R)$. Алгебру Ли группы $A_{ff2}(R)$ обозначим L_{Aff} . Тогда существует элемент $\lambda\in L_{Aff}$ такой, что $G_1 = \{g_t\}$, $g_t = \exp t\lambda$. Тем самым, для того, чтобы найти любой элемент G_1, достаточно найти λ . Для этого воспользуемся равенством $\exp\lambda = g_1$, где g_1 - известное преобразование.

Перейдем к матричным уравнениям. Каждое преобразование из $A_{ff2}(R)$ можно записать в виде $g : \to zAz+d$, где A - $2x2$ матрица, $\det A\ne 0$, $d\in R^2$. Отображение $g\to \hat{A}_g = \begin{pmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ осуществляет изоморфизм между $A_{ff2}(R)$ и подгруппой группы невырожденных 3×3 матриц. Алгебра Ли состоит из векторных полей на плоскости вида

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \mu_1)\, \partial x + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \mu_2)\, \partial y\ .$$

Отображение $\tau \to \hat{A}\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \mu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ осуществляет изоморфизм между L_{Aff} и подалгеброй Ли алгебры **(3х3)** матриц. С учетом отмеченного преобразование g_1 о равносильно уравнению

$\exp C\sim \hat{A}g_1 = \begin{pmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ относительно матрицы где $\hat{A}g_1$ - 2х2 матрица.

Итак, имеем уравнение

$$E + \begin{pmatrix} C & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1/2!)\begin{pmatrix} C & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \ldots = \begin{pmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где **E** - единичная матрица. Легко видеть, что $C\sim^k = \begin{pmatrix} C^k & C^{k-1}\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Для нахождения вектора из (1) запишем уравнение

$$(E + (1/2!)C + (1/3!)C^{2+\cdots})\mu = d. \qquad (2)$$

Через $g(z)$ обозначим целую функцию комплексной переменной z

$$g(z) = 1 + (1/2!) + (1/3!)z^2 + \ldots$$

(ряд сходится $\forall z \in C$). Т.к. $g(z) \neq 0$, то $g(C) = E + (1/2!)C + (1/3!)C^2 + \ldots$ невырождена, т.к. $[g(C)]^{-1} = 1/g(z)z$. Тогда $\vec{\mu} = [g(C)]^{-1} C|$.

Знаю C и $\vec{\mu}$, можно найти преобразование g_t, поскольку C и μ определяют $\lambda \in L_{Aff}$. Именно, g_t есть преобразование $x \to a_1x + b_1y + c_1$, $y \to a_2x + b_2y + c_2$, где $\begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) & C_1 \\ a_2(t) & b_2(t) & C_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp tC\sim$, $C\sim = \begin{pmatrix} C & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Итак, алгоритм нахождения g_t при $0 \le t \le t_1$ состоит из следующих операций.

Алгоритм

1. Решая задачу об эквивалентности для группы $A_{ff2}(R)$, найти преобразование g_1, связывающее B_0 и B_1. Пусть $g_1 : x \to a_1x + b_1y + d_1$, $y \to a_2x + b_2y + d_2$.

2. Найти $\mathbf{C=\ln A}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} \end{pmatrix}$.

3. Вычислить с необходимой точностью матрицу

$$\mathbf{g(C)= E + (1/2!)C + (1/3!)C^2 +\ldots}\ .$$

4. Найти вектор $\vec{\mu}=[\mathbf{g(C)}]^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{d_1} \\ \mathbf{d_2} \end{pmatrix}$.

5. Определить для всех интересующих моментов времени матрицу

$$\mathbf{B(t)=E+t}\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{+\ldots+(t^k/k!)}\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^2 \mathbf{+\ldots}\text{ , т.е. . }\mathbf{B(t)}=\begin{pmatrix} \mathbf{A(t)} & \mathbf{B(t)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Преобразование $\mathbf{g_t}$ имеет вид $\mathbf{g_t : z \to A(t)z+B(t)z,\ z=(x,y)}$.

Вычисления можно упростить для случая $\mathbf{\det(A-E)\neq 0}$ (такой случай соответствует большинству практических задач). Заметим, что если $\mathbf{\det(A-E)\neq 0}$, **то** $\mathbf{\det C\neq 0}$. Поскольку $\mathbf{Cg(C) = \exp C-E =A-E}$, то $\mathbf{g(C)=}$ $\mathbf{= C^{-1}(A-E)}$. Следовательно, $\vec{\mu}$ = $\mathbf{(A-E)^{-1}Cd,\ d = (d_1,\ d_2)}$. Заметим, что $\mathbf{b(t) = tg(tC)\vec{\mu} = tg(tC)\ (A - E)^{-1}\ Cd = (A^t - E)\ (A - E)^{-1}Cd}$. Здесь $\mathbf{A^t}$ - степень матрицы, которая при дробных $\mathbf{t}$ равна $\mathbf{A^t = \exp(t \ln A)}$. Тем самым доказан следующий результат.

<u>**Утверждение.**</u> Пусть $\mathbf{G = \{g_1\},\ g_1 : z \to Az + d,\ \det(A - E) \neq 0}$.
Тогда $\mathbf{g_t : z \to A^t z + (A^t - E)(A - E)^{-1}d}$.

Итак, преобразования $\mathbf{g_t}$ при $\mathbf{t \leq t_1}$ легко находятся по известному преобразованию $\mathbf{g_1}$. Аналогично, легко находятся $\mathbf{g_t}$ при $\mathbf{t_1 \leq t \leq t_2}$ по известному преобразованию $\mathbf{g_{t1+1}}$. Для этого достаточно найти преобразование $\mathbf{(g_{t2+1})^{-1}(g_{t1+1})}$, связывающее изображения $\mathbf{B_{t1}}$ и $\mathbf{B_{t1+1}}$, сделать замену времени $\mathbf{t' = t - t_1}$ и воспользоваться полученными формулами. Также можно найти $\mathbf{g_t}$ при $\mathbf{t_2 \leq\ t \leq t_3}$, зная преобразования $\mathbf{g_{t2+1}}$, и т.д. В целом, для решения задачи нормализации на временном отрезке $\mathbf{[0,t_{k+1}]}$ достаточно найти преобразования $\mathbf{g_1,\ g_{t1+1},\ldots,g_{tk+1}}$, связывающие изображения $\mathbf{B_1,B_{t1+1},\ldots,B_{tk+1}}$с эталоном $\mathbf{B_0}$.
