УДК 681.51

ОБРАБОТКА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ТРАНСФОРМАЦИЯХ

[*] к.т.н. В.П. Машталир, к.т.н. А.В. Орлов
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

Рассматривается задача анализа динамики объектов на основе исследования параметров геометрических преобразований их изображений.

Пусть $\mathbf{B_t}$ - изображение некоторого движущегося объекта в момент времени $\mathbf{t}$. Изображение $\mathbf{B_0}$, полученное в начальный момент времени, считаем эталонным. В зависимости от характера возможных перемещений объекта изображения $\mathbf{B_t}$ эквивалентны изображению $\mathbf{B_0}$ относительно действия той или иной группы геометрических преобразований плоскости. Обозначим эту группу $\mathbf{G}$. Тогда эквивалентность $\mathbf{B_t}$ и $\mathbf{B_0}$ означает, что в каждый момент времени $\mathbf{t}$ существует преобразование координат $\mathbf{g_t \in G}$, $\mathbf{g_t : x \rightarrow h_1(x,y,t),\ y \rightarrow h_2(x,y,t)}$, которое переводит изображение $\mathbf{B_0}$ в изображение $\mathbf{B_t : B_t = g_t\ B_0 = B_0(h_1(x,y,t), h_2(x,y,t))}$. Зная $\mathbf{g_t}$, легко найти обратное преобразование $(\mathbf{g_t})^{-1}$. Такое преобразование нормализует изображение $\mathbf{B_t}$. Процедуры нормализации позволяют сводить распознавание изображений к сравнению с эталоном, а знание параметров группы преобразований дает возможность отслеживать перемещения объектов.

В работе рассмотрен случай, когда $\mathbf{G}$ - группа аффинных преобразований: $\mathbf{x \rightarrow a_1x+b_1y+c_1,\ y \rightarrow a_2x+b_2y+c_2,\ a_1b_2-a_2b_1 \neq 0}$, где $\mathbf{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2}$ - параметры преобразований.

Существует различные способы нахождения преобразования $\mathbf{g_t}$ для фиксированного момента времени $\mathbf{t}$. Это, в первую очередь, методы последовательной и параллельной нормализации. Однако, время реализации этих методов не позволяет для реальных задач пользоваться ими для каждого очередного момента времени. В связи с этим необходимо тем или иным образом осуществлять прогноз движения, то есть нахо-

---

дить g_t при $t>t_0$ по информации о g_t , при $t\le t_0$ без решения задачи нормализации относительно шестипараметрической афинной группы.

Обычно любая последовательность изображений реального движущегося объекта обладает тем свойством, что существует последовательность однопараметрических подгрупп $G_1,G_2,\ldots,G_k,\ldots$ и последовательность временных дискретов $t_1,\ldots,t_k,\ldots$ таких, что изображения $B_{t'}$ и $B_{t''}$ эквивалентны относительно действия G_k при $t_k\le t'$, $t''\le t_k$. Другими словами, многопараметрическое управление движением обычно разбивается в последовательность однопараметрических. Например, при движении вдоль ломаной: G_k - группы смещений вдоль фиксированных прямых, t_k - время прохождения изломов. Возможны и гораздо более сложные преобразования, когда отдельные однопараметрические группы нельзя непосредственно записать аналитически.

Допустим, что известны моменты времени $t_1,t_2,\ldots$ смены действия однопараметрических подгрупп. Покажем, как можно нормализовать последовательность изображений B_t, решая задачу об эквивалентности лишь столько раз, сколько раз однопараметрическая подгруппа сменяется другой в течение исследуемого отрезка времени $[0,T]$. Для этого достаточно указать способ получения всех g_t при $0 \le t \le t_1$ путем однократного решения задачи об эквивалентности относительно афинной группы. Пусть g_1 - преобразование, связывающее эталон B_0 и изображение B_t в момент времени $t=1$, - найдено в результате решения задачи об эквивалентности. Покажем, как найти g_t при $0\le t\le t_1$.

Пусть G_1 - однопараметрическая подгруппа группы афинных преобразований $A_{ff}(R)$. Алгебру Ли группы $A_{ff2}(R)$ обозначим L_{Aff} . Тогда существует элемент $\lambda\in L_{Aff}$ такой, что $G_1 = \{g_t\}$, $g_t = \exp t\lambda$. Тем самым, для того, чтобы найти любой элемент G_1, достаточно найти λ . Для этого воспользуемся равенством $\exp\lambda = g_1$, где g_1 - известное преобразование.

Перейдем к матричным уравнениям. Каждое преобразование из $A_{ff2}(R)$ можно записать в виде $g : \to zAz+d$, где A - $2x2$ матрица, $\det A\neq 0$, $d\in R^2$. Отображение $g\to \hat{A}_g = \begin{pmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ осуществляет изоморфизм между $A_{ff2}(R)$ и подгруппой группы невырожденных 3 x 3 матриц. Алгебра Ли состоит из векторных полей на плоскости вида

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \mu_1)\,\partial x + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \mu_2)\,\partial y\ .$$

Отображение $\tau\to\hat{A}\tau=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \mu_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \mu_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ осуществляет изоморфизм между L_{Aff} и подалгеброй Ли алгебры **(3x3)** матриц. С учетом отмеченного преобразование g_1 о равносильно уравнению

$\exp C\sim\hat{A}g_1=\begin{pmatrix}A & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ относительно матрицы где $\hat{A}g_1$ - 2x2 матрица.

Итак, имеем уравнение

$$E+\begin{pmatrix}C & \mu\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(1/2!)\begin{pmatrix}C & \mu\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2+\ldots=\begin{pmatrix}A & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где E - единичная матрица. Легко видеть, что $C\sim^k=\begin{pmatrix}C^k & C^{k-1}\mu\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Для нахождения вектора из (1) запишем уравнение

$$(E+(1/2!)C+(1/3!)C^{2+\cdots})\mu=d. \qquad (2)$$

Через $g(z)$ обозначим целую функцию комплексной переменной z

$$g(z)=1+(1/2!)+(1/3!)z^2+\ldots$$

(ряд сходится $\forall z\in C$). Т.к. $g(z)\neq 0$, то $g(C)=E+(1/2!)C+(1/3!)C^2+\ldots$ невырождена, т.к. $[g(C)]^{-1}=1/g(z)z$. Тогда $\vec{\mu}=[g(C)]^{-1}\,C|$.

Зная C и $\vec{\mu}$, можно найти преобразование g_t, поскольку C и μ определяют $\lambda\in L_{Aff}$. Именно, g_t есть преобразование $x\to a_1x+b_1y+c_1$, $y\to a_2x+b_2y+c_2$, где $\begin{pmatrix}a_1(t) & b_1(t) & C_1\\ a_2(t) & b_2(t) & C_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\exp tC\sim$, $C\sim=\begin{pmatrix}C & \mu\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Итак, алгоритм нахождения g_t при $0\leq t\leq t_1$ состоит из следующих операций.

Алгоритм

1. Решая задачу об эквивалентности для группы $A_{ff2}(R)$, найти преобразование g_1, связывающее B_0 и B_1. Пусть $g_1: x\to a_1x+b_1y+d_1$, $y\to a_2x+b_2y+d_2$.

2. Найти $\mathbf{C=\ln A}$, $\mathbf{A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}$.

3. Вычислить с необходимой точностью матрицу

$$\mathbf{g(C)= E + (1/2!)C + (1/3!)C^2 +\ldots} \;.$$

4. Найти вектор $\vec{\mu}=[\mathbf{g(C)}]^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{d_1} \\ \mathbf{d_2} \end{pmatrix}$.

5. Определить для всех интересующих моментов времени матрицу

$$\mathbf{B(t)=E+t\begin{pmatrix} C & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\ldots+(t^k/k!)\begin{pmatrix} C & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2} +\ldots \text{ , т.е. . } \mathbf{B(t)=\begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Преобразование $\mathbf{g_t}$ имеет вид $\mathbf{g_t : z\rightarrow A(t)z+B(t)z,\ z=(x,y)}$.

Вычисления можно упростить для случая $\mathbf{det(A\text{-}E)\neq 0}$ (такой случай соответствует большинству практических задач). Заметим, что если $\mathbf{det(A\text{-}E)\neq 0}$, **то** $\mathbf{detC\neq 0}$. Поскольку $\mathbf{Cg(C) = expC\text{-}E =A\text{-}E}$, то $\mathbf{g(C)= = C^{-1}(A\text{-}E)}$. Следовательно, $\vec{\mu} = \mathbf{(A\text{-}E)^{-1}Cd,\ d = (d_1,\ d_2)}$. Заметим, что $\mathbf{b(t) = tg(tC)\vec{\mu} = tg(tC)\ (A - E)^{-1}\ Cd = (A^t - E)\ (A - E)^{-1}Cd}$. Здесь $\mathbf{A^t}$ - степень матрицы, которая при дробных $\mathbf{t}$ равна $\mathbf{A^t = exp(t\ lnA)}$. Тем самым доказан следующий результат.

Утверждение. Пусть $\mathbf{G = \{g_1\},\ g_1 : z \rightarrow Az + d,\ det(A - E) \neq 0}$.
Тогда $\mathbf{g_t : z \rightarrow A^t z + (A^t - E)(A - E)^{-1}d}$.

Итак, преобразования $\mathbf{g_t}$ при $\mathbf{t \leq t_1}$ легко находятся по известному преобразованию $\mathbf{g_1}$. Аналогично, легко находятся $\mathbf{g_t}$ при $\mathbf{t_1 \leq t \leq t_2}$ по известному преобразованию $\mathbf{g_{t1+1}}$. Для этого достаточно найти преобразование $\mathbf{(g_{t2+1})^{-1}(g_{t1+1})}$, связывающее изображения $\mathbf{B_{t1}}$ и $\mathbf{B_{t1+1}}$, сделать замену времени $\mathbf{t'=t - t_1}$ и воспользоваться полученными формулами. Также можно найти $\mathbf{g_t}$ при $\mathbf{t_2 \leq\ t\leq t_3}$, зная преобразования $\mathbf{g_{t2+1}}$, и т.д. В целом, для решения задачи нормализации на временном отрезке $\mathbf{[0,t_{k+1}]}$ достаточно найти преобразования $\mathbf{g_1,\ g_{t1+1},\ldots,g_{tk+1}}$, связывающие изображения $\mathbf{B_1,B_{t1+1},\ldots,B_{tk+1}}$с эталоном $\mathbf{B_0}$.