УДК 519.2

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СМЕСИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕЙБУЛЛА МЕТОДОМ МИНИМУМА ХИ - КВАДРАТ.

к.т.н. В.Ю. Дубницкий
(представил д.т.н., проф. В.С.Харченко)

В работе рассмотрен алгоритм получения параметров смеси распределений Вейбулла, позволяющий одновременно с оценкой параметра проверять гипотезу о виде распределения.

При определении распределения наработки изделий до первого отказа возникают ситуации, когда условия проведения испытаний изменяют по некоторому плану или они изменяются произвольно под влиянием неконтролируемых факторов.

В этом случае плотность распределения наработки до первого отказа $\mathbf{f(t)}$ представляют, согласно [1], в виде смеси распределений:

$$\mathbf{f(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i f(t, \vec{\Theta}_i), c_i > 0,} \tag{1}$$

при условии:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{c_i = 1}. \tag{2}$$

В (1), (2) принято, что $\mathbf{f\left(t, \vec{\Theta}_i\right)}$ - $\mathbf{i}$ - тая плотность распределения известного вида, но с неизвестным вектором параметров $\vec{\mathbf{\Theta}}_\mathbf{i}$ и параметром смешивания $\mathbf{C = (c_1, c_2, c_i, ...c_k)}$.

Физический смысл параметров смешивания: $\mathbf{c_i}$ - доля времени испытания изделий в $\mathbf{i}$-тых условиях.

Требуется по множеству результатов эксперимента $\mathbf{T = t_1, t_2, t_i, ...t_N}$ получить оценки $\hat{\vec{\mathbf{\Theta}}}$ и $\hat{\mathbf{C}}$ для величин $\vec{\mathbf{\Theta}}$ и $\vec{\mathbf{C}}$.

В данной работе рассмотрено решение поставленной задачи для $\mathbf{k=2}$ и случая, когда $\mathbf{f(t,\vec{\Theta})}$ - плотность распределения Вейбулла вида:

$$\mathbf{f\left(t,\vec{\Theta}_i\right)=\frac{b_i}{a_i}\left(\frac{t}{a_i}\right)^{b_i-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{a_i}\right)^{b_i}\right],i=1,2.} \tag{3}$$

Тогда вектор оцениваемых параметров $\mathbf{\vec{\Theta}_i=\left(a_i,b_i\right)}$, вектор параметров смеси $\mathbf{\vec{C}=(c,\mathit{l}-c)}$.

Функция распределения Вейбулла имеет вид:

$$\mathbf{F\left(t,\vec{\Theta}_i\right)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{a_i}\right)^{b_i}\right],i=1,2.} \tag{4}$$

Плотность распределения смеси в нашем случае будет:

$$\mathbf{f(t)=cf\left(t;a_1,b_1,\right)+(1-c)f\left(t;a_2b_2\right)}, \tag{5}$$

а функция распределения смеси:

$$\mathbf{F(t)=cF\left(t;a_1,b_1,\right)+(1-c)F\left(t;a_2b_2\right).} \tag{6}$$

Для решения поставленной задачи использован метод минимума хи-квадрат (ММХ), [2, 3].

Суть его в том, что наилучшими оценками $\mathbf{\hat{\vec{\Theta}}}$ неизвестного вектора параметров $\mathbf{\vec{\Theta}}$ для плотности $\mathbf{f\left(t;\vec{\Theta}\right)}$ или функции распределения $\mathbf{F\left(t;\vec{\Theta}\right)}$ считают те, которые минимизируют выражение вида

$$\mathbf{\chi^2=\sum_{m=1}^{M}\frac{\left(\eta_m-NP_m\right)^2}{NP_m}}, \tag{7}$$

где: $\mathbf{P_m}$ - теоретическая вероятность попадания в $\mathbf{m}$-й интервал возможного значения случайной величины $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{P_m=\int_{t_{m-1}}^{t_m}f(t,\vec{\Theta})dt,}$$

где: $\mathbf{\eta_m}$ - эмпирическая частота попадания в m-интервал $\mathbf{(m=1,2,...M)}$, зарегистрированная в процессе эксперимента; $\mathbf{N}$ - объем выборки.

В [2]. доказано, что ММХ - оценки с увеличением объема выборки $\mathbf{N}$ приобретают свойства состоятельности и эффективности, то есть совпадают по свойствам с оценками, полученными по методу максимума правдоподобия. В [3]. для лучшей организации вычислительного процесса рекомендуется вместо χ^2 в формуле (7) использовать выражение вида

$$\tilde{\chi}^2 = \sum_{m=1}^{M} \frac{\left(\eta_m - NP_i\right)^2}{\eta_m} \quad . \tag{8}$$

В данной работе использовано именно это выражение.

Тогда условие поставленной задачи можно сформулировать так.

Для известных $\eta_m, m = \overline{1, M}$ требуется найти такие $\mathbf{c}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$, которые минимизируют (8) при ограничениях

$$0 < c < 1, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} P_m = &-\left(\exp\left(-\left(\frac{t_{m-1}}{a_1}\right)^{b_1}\right) - \exp\left(-\left(\frac{t_m}{a_1}\right)^{b_1}\right)\right) + \\ &+ (1-c)\left(\exp\left(-\left(\frac{t_{m-1}}{a_2}\right)^{b_2}\right) - \exp\left(-\left(\frac{t_m}{a_2}\right)^{b_2}\right)\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая реальную область возможных значений величин $(a_i, b_i), i = 1,2,$ [4].в работе принято, что

$$0{,}3 \le b \le 10; \qquad 0{,}03 \le a \le 6{,}67 \tag{11}$$

Для решения задачи использована двухэтапная процедура.

На первом этапе, используя метод Ψ-преобразований [5] решают систему уравнений, характерную для метода моментов:

$$\begin{aligned} &\hat{\mu}_r = ca_1\Gamma\left(\frac{r}{b_1} + 1\right) + (1-c)a_2\Gamma\left(\frac{r}{b_2} + 1\right), \\ &r = \overline{1{,}5} \end{aligned} \tag{12}$$

где: $\hat{\mu}_r$ - $\mathbf{r}$ - й начальный момент, $\Gamma(\cdot)$ - гамма - функция.

Полученные значения $\hat{a}_1, \hat{b}_1,\ \hat{a}_2, \hat{b}_2,\ \hat{c}$ используют в качестве центра плана для поиска минимума (8) методом симплексного поиска [6]..

По окончании работы алгоритма полученные оценки $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{c}\right)$ подставляем в (10) и вычисляем χ^2 в форме (7).

Если, согласно [7]:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(M - l - 1) < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(M - l - 1) \qquad (13)$$

где: α - уровень доверительной вероятности, l - число оцениваемых параметров, в нашем случае l = 5, то принимается гипотеза о том, что исходная совокупность данных является смесью распределений Вейбулла с параметрами $\hat{c}, \hat{a}_i, \hat{b}_i, i = 1{,}2.$

Координаты точки Z, в которой происходит изменение условий эксперимента определяют согласно [1], как корень уравнения:

$$t^{\left(\hat{b}_2 - \hat{b}_1\right)} \hat{a}_1 \exp\left[\frac{t^{\hat{b}_1}}{\hat{a}^{\hat{b}_1}} - \frac{t^{\hat{b}_2}}{\hat{a}_2^{\hat{b}_2}}\right] = \frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_2} \hat{a}_2^{\hat{b}_2} \qquad (14)$$

Таким образом предлагаемая методика позволяет одновременно проверять гипотезу о виде распределений, образовавших смесь и определять их параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубарев А.И. Надежность в машиностроении. - М: Изд. стандартов, 1989. -226 с.

2. Кендалл М. Дж, Стюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. -899 с.

3. Миленький А.В. Классификация сигналов в условиях неопределенности. – М.: Сов. Радио, 1975. -327 с.

4. ГОСТ 11.007-75. Правила определения оценок и доверительных границ параметров распределения Вейбулла.

5. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. – М.: Наука, 1983. -253 с.

6. Дамбраускас А.П. Симплексный поиск. – М.: Энергия, 1979. -173 с.

7. Айвазян С.П. Статистические исследования зависимостей. – М.: Металлургия, 1968. -192 с.