

## АЛГОРИТМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЛП С БП

В.Ф. Третьяк, С.В. Листровой, С.В. Яблочков  
(представил проф. А.В. Королев)

Рассмотрен алгоритм параллельных вычислений для решения задачи целочисленного линейного программирования с булевыми переменными.

Решение оптимизационных задач требует огромного объема вычислений, зачастую даже большего, чем можно выполнить за обозримый промежуток времени на самых современных высокопроизводительных ЭВМ с фон-неймановской архитектурой. В тех же случаях, когда такой объем вычислений нужно производить в реальном времени с использованием традиционных ЭВМ, ситуация становится совсем безнадёжной.

Для решения оптимизационных задач, которое ранее решалось с помощью одного процессора, в настоящее время предлагается применять матрицы процессоров. Процесс установления соответствия между заданной задачей и конкретным типом мультипроцессорной архитектуры можно представить в виде последовательного выполнения четырех этапов: составляется последовательный алгоритм для решения данной задачи; разрабатывается алгоритм параллельных вычислений, который специально подгоняется под желаемый тип архитектуры; получают логическое описание данной архитектуры; детально прорабатывается реализация процессора, отражающая полученное логическое описание.

Разработке последовательных алгоритмов для решения данной задачи посвящены работы [1,2]. На основе этих алгоритмов разрабатываются алгоритмы параллельных вычислений и отображаются на параллельные вычислительные структуры. Проводя исследования совместных свойств ПВС и параллельных алгоритмов, невозможно учесть все их особенности. В этих случаях вынуждены пользоваться некоторой идеализированной моделью вычислительной структуры. Однако для того, чтобы исследования параллельных свойств алгоритмов не были бесполезными для практических целей, необходимо, чтобы математическая модель ПВС в достаточной мере адекватно отражала особенности ее структуры.

Абстрактную вычислительную систему будем представлять как множество процессорных элементов  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Каждый процессорный элемент характеризуется именем  $q_i \in Q$  и алфавитом  $A_i$ . Символы алфавита могут интерпретироваться как константы или переменные. Парой  $(a, q_i)$  будем обозначать состояние процессорного элемента  $q_i$ . Множество состояний всех процессорных элементов системы  $S = \{(a, q_i)\}, i = 1, \dots, n, a \in A_i$ , в один и тот же момент времени будем называть глобальным состоянием системы, а некоторое его подмножество  $S^{\circ} \subset S$  - локальным состоянием. Преобразуя данные, процессорный элемент изменяет свое состояние, и возможно, состояние некоторых других связанных с ним элементов, т.е. производит локальное преобразование, которое будем называть операцией.

Как показано в [3], параллельным вычислением называется множество операций  $\Phi = \{\theta_j\}, j = 1, \dots, n$ , где

$$\theta_j : S_i' \longrightarrow S_i'', \quad (1)$$

$S_i' = (a_i, q_i)$  - локальное состояние, называемое условием готовности выполнения операции  $\theta_j$ ;  $S_i'' = (b_i, q_i)$  - локальное состояние, называемое условием завершения выполнения операции  $\theta_j$ . Локальное состояние  $S_i'' = (b_i, q_i)$  процессорных элементов определяется при выполнении правил  $L_w$ . Эти правила рассмотрены в работе [1,2]. В результате применения  $\theta_j$  происходит смена состояний  $(a_i, q_i) \in S_i'$  на  $(b_i, q_i) \in S_i''$ .

Рассмотрим реализацию алгоритма параллельных вычислений для пяти вершин графа. Вычислительный процесс алгоритма MAX [1] для случая реализации на  $n$  процессорных элементах имеет следующий вид:

$S_0$  : установка начальных значений.

$$S_1 : \theta_1 : q_1 := S' \{(a_1, q_1) + (a_2, q_2)\} \rightarrow S''_{L_1} (b_1, q_1);$$

$$q_2 := S' \{(a_2, q_2) + (a_3, q_3)\} \rightarrow S''_{L_1} (b_2, q_2);$$

$$q_3 := S' \{(a_3, q_3) + (a_4, q_4)\} \rightarrow S''_{L_1} (b_3, q_3);$$

$$q_4 := S' \{(a_4, q_4) + (a_5, q_5)\} \rightarrow S''_{L_1} (b_4, q_4).$$

$$\theta_2 : q_1 := q^* ;$$

$$q_2 := S' \{(a_1, q_1) + (a_3, q_3)\} \rightarrow S''_{L_1} (b_2, q_2);$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{q}_3 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) + (\mathbf{a}_4, \mathbf{q}_4)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_3, \mathbf{q}_3); \\
& \mathbf{q}_4 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3) + (\mathbf{a}_5, \mathbf{q}_5)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_4, \mathbf{q}_4). \\
\theta_3: & \mathbf{q}_1 := \mathbf{q}^*; \quad \mathbf{q}_2 := \mathbf{q}^*; \\
& \mathbf{q}_3 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_4, \mathbf{q}_4)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_3, \mathbf{q}_3); \\
& \mathbf{q}_4 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) + (\mathbf{a}_5, \mathbf{q}_5)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_4, \mathbf{q}_4). \\
\theta_4: & \mathbf{q}_1 := \mathbf{q}^*; \quad \mathbf{q}_2 := \mathbf{q}^*; \quad \mathbf{q}_3 := \mathbf{q}^*; \\
& \mathbf{q}_4 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_5, \mathbf{q}_5)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_5, \mathbf{q}_5). \\
& \mathbf{S}'(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) := \mathbf{S}''(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1); \quad \mathbf{S}'(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) := \mathbf{S}''(\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2); \\
& \mathbf{S}'(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3) := \mathbf{S}''(\mathbf{b}_3, \mathbf{q}_3); \quad \mathbf{S}'(\mathbf{a}_4, \mathbf{q}_4) := \mathbf{S}''(\mathbf{b}_4, \mathbf{q}_4). \\
\text{ext}(\mathbf{f}) := & \max \{ \mathbf{S}''(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) \vee \mathbf{S}''(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) \vee \mathbf{S}''(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3) \vee \mathbf{S}''(\mathbf{a}_4, \mathbf{q}_4) \}. \\
\mathbf{S}_2 : & \theta_1: \mathbf{q}_1 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1); \\
& \mathbf{q}_2 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) + (\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2); \\
& \mathbf{q}_3 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3) + (\mathbf{a}_4, \mathbf{q}_4)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_3, \mathbf{q}_3); \\
& \mathbf{q}_4 := \mathbf{0}. \\
& \theta_2: \mathbf{q}_1 := \mathbf{q}^*; \\
& \mathbf{q}_2 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2); \\
& \mathbf{q}_3 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) + (\mathbf{a}_4, \mathbf{q}_4)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_3, \mathbf{q}_3); \\
& \mathbf{q}_4 := \mathbf{0}. \\
& \theta_3: \mathbf{q}_1 := \mathbf{q}^*; \quad \mathbf{q}_2 := \mathbf{q}^*; \\
& \mathbf{q}_3 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_4, \mathbf{q}_4)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_3, \mathbf{q}_3); \\
& \mathbf{q}_4 := \mathbf{0}. \\
& \mathbf{S}'(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) := \mathbf{S}''(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1); \quad \mathbf{S}'(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) := \mathbf{S}''(\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2); \\
& \mathbf{S}'(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3) := \mathbf{S}''(\mathbf{b}_3, \mathbf{q}_3). \\
\text{ext}(\mathbf{f}) := & \max \{ \mathbf{S}''(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) \vee \mathbf{S}''(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) \vee \mathbf{S}''(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3) \}. \\
\mathbf{S}_3 : & \theta_1: \mathbf{q}_1 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1); \\
& \mathbf{q}_2 := \mathbf{S}' \{(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) + (\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3)\} \rightarrow \mathbf{S}''_{L_1}(\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{q}_3 := \mathbf{0}; \quad \mathbf{q}_4 := \mathbf{0}; \\
\theta_2: & \mathbf{q}_1 := \mathbf{q}^*; \\
& \mathbf{q}_2 := S' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_3)\} \rightarrow S''_{L_1}(\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2); \\
& \mathbf{q}_3 := \mathbf{0}; \quad \mathbf{q}_4 := \mathbf{0}. \\
& S'(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) := S''(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1); \quad S'(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2) := S''(\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2); \\
& \text{ext}(f) := \max \{S''(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) \vee S''(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2)\} \\
S_4: \theta_1: & \mathbf{q}_1 := S' \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2)\} \rightarrow S''_{L_1}(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1); \\
& \mathbf{q}_2 := \mathbf{0}; \quad \mathbf{q}_3 := \mathbf{0}; \\
& \mathbf{q}_4 := \mathbf{0}. \\
& S'(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1) := S''(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1); \\
& \text{ext}(f) = \max \{S''(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1)\}.
\end{aligned}$$

Логическое описание архитектуры и реализация процессора, отражающая полученное логическое описание для решения задачи ЦЛП с БП рассмотрены в работах [2,4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Королев А.В., Листровой С.В., Третьяк В.Ф. Эффективность параллельных алгоритмов оптимизации вычислительного процесса // Информационно - керуючі системи на залізничному транспорті. - 1997. - №1. - С. 85 - 91.
2. Koroljov A.V., Krjučov O.M., Listrovoj S.V., Tretjak V.F. An optimal planning of algorithms in computer systems // Thesis of conference "Mathematical modeling and information technologies". - Belgorod (Russiya), 1997. - P.32 - 33.
3. Ачасова С.М., Бадман О.Л. / Корректность параллельных вычислительных процессов. – Новосибирск: Наука, 1990.- 253 с.
4. Третьяк В.Ф., Кавун С.В., Гуль А.Ю. Реализация приближенного алгоритма целочисленного программирования на систолических однородных средах // Обработка информации и обеспечения надежности систем управления. Сб. науч. тр. - Харьков: НАНУ, ПАНИ, ХВУ, 1997.- С. 144 - 147.