УДК 519.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ С УЧЕТОМ ЛАНДШАФТА ПРИ РАЗНОРОДНЫХ КРИТЕРИЯХ И ОГРАНИЧЕНИЯХ

А. А. Плехова, д.ф. - м.н. С.В. Смеляков

Строится модель задачи построения и оптимизации связывающей сети коммуникаций на местности. Предлагается декомпозиционный подход к ее решению, основанный на ситуационно - лексикографической оптимизации на **ε** - вариативном множестве альтернатив.

Анализ проблемы. При проектировании автомобильных дорог и железнодорожных линий, иных видов инженерных сетей, и при планировании маршрутов передислокации длинномерной и тяжелой техники на пересеченной местности возникают в полной мере не формализуемые задачи прокладки трасс в районах, описываемых областями сложной геометрической формы, на которые накладываются ограничения геометрического, топологического и иного характера. При этом сами трассы и образуемые ими коммуникационные сети должны быть эффективны в смысле ряда показателей, зачастую противоречивых. Совокупность подобных требований задана в Строительных нормах и правилах (СНиП) и определяет, в частности, условия пространственной увязки различных типов коммуникаций.

Поэтому, в данных обстоятельствах говорят не о полной формализации подобных задач и их автоматическом решении, а о создании общей модели и подхода к их решению, которые обеспечивали бы достаточную гибкость в выборе критериев и ограничений в рамках соответствующей интерактивной системы подготовки и принятия решений с одной стороны, и интегрировали бы в себе существующие модели и методы оптимизации.

Основные элементы модели. Неодносвязная область на плоскости

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}l\,[\mathbf{F}_0 \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i)], \tag{1}$$

где $\mathbf{F}_i$ $(\mathbf{i = 0, 1, \ldots, n})$ - односвязные замкнутые области, взаимно непересекающиеся и лежащие в $\mathbf{F}_0$ при $\mathbf{i > 0}$, а $\mathbf{C}l$ - операция замыкания. Границы $\mathbf{L}_i = \mathbf{F}_r\ \mathbf{F}_i$ этих областей представляются простыми замкнутыми ломаными данного функционального класса $\mathbf{\Lambda}$. При моделировании местности в качестве класса выбирают ломаные, и в отдельных случаях рассматривают кривые 2 - го порядка, что существенно повышает трудоемкость алгоритмов. В пределах данной области $\mathbf{F_0}$ области $\mathbf{F_i}$ $\mathbf{(i = 1, 2, \ldots, n)}$ называют зонами запрета. Они определяют место, недопустимое или нежелательное (в смысле некоторого критерия или нечеткого ограничения) для прокладки трасс. В общем случае моделью трассы $\mathbf{p}$, определяющей функциональный класс $\mathbf{P}$, является непрерывная линия, составленная из фрагментов вида

$$\mathbf{p = s_1\, r_1\, c_1\, R_1\;\; s_2\, r_2\, c_2\, R_2\; \ldots\; s_m\, r_m\, c_m\, R_m}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{s_i}$ - отрезки, $\mathbf{c_i}$ - дуги окружностей, а $\mathbf{r_i}$, $\mathbf{R_i}$ – радиоиды, сопрягающие (согласно СНиП) отрезки с дугами окружностей для компенсации динамического удара для транспортного средства (ТС). Иногда радиоидальные фрагменты могут исключаться; например, там, где трасса рассчитывается на движение ТС с малой скоростью – в депо, при движении по грунтовой дороге. Могут быть заданы граничные условия, определяющие тип и/или ориентацию начального, конечного фрагментов искомой трассы. В общем случае допустимое множество альтернатив (т.е. трасс) $\mathbf{P}$ определяется условием (2) и ограничением на кривизну $\mathbf{k(c_i)}$ или радиус $\mathbf{\rho(c_i)}$ дуг $\mathbf{c_i}$, поскольку параметры радиоид $\mathbf{r_i}$, $\mathbf{R_i}$ получают из условия сопряжения дуг с отрезками. При этом ограничения могут быть интервальными, точечными (дуги фиксированного радиуса) и предельными, когда рассматривается класс ломаных с ограниченным или фиксированным углом поворота в вершинах.

Геометрическое положение трассы $\mathbf{p}$ в области $\mathbf{F}$ определяет такие ее показатели, как длину $\boldsymbol{l}\mathbf{(p)}$, число $\mathbf{m(p)}$ входящих в нее круговых вставок $\mathbf{c_i}$, (см. (2)), стоимость сооружения $\mathbf{c(p)}$ и удельные эксплуатационные расходы $\mathbf{e(p)}$, технологичность $\mathbf{t(p)}$ и надежность $\mathbf{b(p)}$. Поскольку трасса рассчитывается на заданную скорость движения по ней ТС, показатель $\boldsymbol{l}\mathbf{(p)}$ выступает аналогом времени прохождения ТС по трассе, а число $\mathbf{m(p)}$ и кривизна дуговых вставок – аналогами, обратно пропорциональными надежности $\mathbf{b(p)}$ или безопасности движения, которая утверждается (в СНиП и др. документах) как один из важнейших показателей. Экономия на сооружении, $\mathbf{c(p)}$, может привести к росту эксплуатационных расходов $\mathbf{e(p)}$ и снижению надежности за счет прохождения трассы вблизи опасных участков (осыпей и т.п.), и наоборот. Технологичность служит мерой удовлетворения требований необязательных, но желательных; например, об увязке места прокладки трассы с иными коммуникациями или местами: так, ее прохождение вблизи болота может быть нежелательно, но дает улучшение по иным показателям, а потому может быть оправданным.

При этом показатели **b**, **c**, **e**, **t** могут определять интегральные значения для трассы соответственно распределению своих плотностей, что представляет предмет специального рассмотрения. Вместе с тем, можно считать, что показатель **b(p)** есть произведение следующих вероятностных аналогов надежности (нормировка которых может быть опущена)

$$\begin{cases} \mathbf{b}_l(\mathbf{p}) = 1/l(\mathbf{p}), \qquad (l(\mathbf{p}) > 1); \\ \mathbf{b}_m(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{m}(1 - 1/\rho_i), \ (\rho_i > 1) \text{ при } \mathbf{m} > 0; \ 1 \text{ при } \mathbf{m} = 0; \\ \mathbf{b}_d(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{d}(1 - g_j)^{k_j}; \end{cases} \quad (3)$$

определяемых фактором длины $l(\mathbf{p})$, радиуса кривизны ρ_i круговых вставок, наличием **d** зон опасности, в каждой из которых находится $\mathbf{k_j}$ фрагментов трассы **p** единичной длины, надежность прохождения равна $\mathbf{1 - g_j}$. Тогда снижение надежности обусловлено возможным нарушением технологических требований. При отсутствии зон опасности получаем $\mathbf{b_d(p) = 1}$, а применение вставок малой кривизны или их отсутствие дает $\mathbf{d_m(p) = 1}$.

Основные задачи и методы их решения. Сложность моделирования задач рассматриваемого типа определяется тем, что введенные показатели трасс могут выступать и в качестве ограничений **Q**, и принципа оптимальности **f**, и в обоих одновременно. Поэтому ограничения **Q** можно разбить на два множества – функциональные $\mathbf{Q_1}$ **(F, Λ, P)** и критериальные $\mathbf{Q_2}$ **(l, m, c, e, t)**, $\mathbf{Q=Q_1 \cup Q_2}$. Допустимое множество трасс обозначим $\mathbf{P_Q}$.

Что касается рассмотренных показателей и необходимости их оптимизации при введенных ограничениях, в общем случае не представляется возможным [1] разработка "глобального" метода оптимизации для случая поиска седловых точек или оптимума для произвольной их свертки. Поэтому предлагается рассматривать задачу лексикографической оптимизации на расширенном, **ε** - вариативном множестве альтернатив (семейств трасс). Так, не теряя общности, рассмотрим случай, когда принцип оптимальности **f** задает следующий порядок значимости критериев

$$\mathbf{f}_{l\mathbf{mcet}} : l \succ \mathbf{m} \succ \mathbf{c} \succ \mathbf{e} \succ \mathbf{t}. \quad (4)$$

Пусть $\varepsilon_l > 0$ определяет ε_l - окрестность $\mathbf{P}_{\varepsilon l}$ решения задачи

$$\mathbf{p}_l = \arg \underset{\mathbf{p} \in \mathbf{P}}{\mathrm{extr}}\, l(\mathbf{p}) \quad (5)$$

в пространстве $\mathbf{P}$. Аналогично, $\mathbf{P}_{\varepsilon l,\varepsilon m}$ – ε_m - окрестность решения p_{lm} задачи оптимизации критерия $\mathbf{m(p)}$ на $\mathbf{P}_{\varepsilon l}$, и т.д. Тогда отображение $\mathbf{f}_{lmcet}$: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}_{\varepsilon l,\varepsilon m,\varepsilon c,\varepsilon e,\varepsilon t}$, соответственно выбору значений ε_ι $(\iota \in \{l, \mathbf{m}, \mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{t}\})$, определяет некоторое семейство путей, которое стягивается в точку $\mathbf{p}^* \in \mathbf{P}$ при $\varepsilon_\iota \to \mathbf{0}$, которая дает решение задачи безусловной лексикографической оптимизации с принципом оптимальности φ вида (4). Пусть φ - некоторый принцип оптимальности, а ограничения $\mathbf{Q}$ определяют допустимое множество альтернатив $\mathbf{P_Q}$. Тогда *общая задача поиска оптимальной трассы* имеет вид

$$\textbf{\textit{Найти}} \quad \underset{\mathbf{p}\in \mathbf{P_Q}}{\mathbf{arg\,extr}}\, \varphi(\mathbf{p}). \tag{6}$$

В данной постановке решение задачи (6) сводится к последовательной оптимизации на сужающихся семействах ε - оптимальных альтернатив, что позволяет применять для этих целей существующие методы и подходы вариационного и дискретного типа. При этом решение задачи о построении связывающей сети также приводит к задаче типа (6); актуальным для приложений в этом случае будет рассмотрение показателя надежности $\beta(\mathbf{S})$ сети $\mathbf{S}$. Так, пусть дано множество точек $\mathbf{A}=\{\mathbf{A_i}\}_{i=1,v}$, которые совпадают с некоторыми вершинами $\mathbf{B}=\{\mathbf{B_j}\}_{j=1,w}$ связывающей сети $\mathbf{S}$. Пусть $\beta(\mathbf{A_i}, \mathbf{A_j})$ – вероятность прохождения маршрута из $\mathbf{A}_i$ в $\mathbf{A_j}$, рассчитанная по надежности трасс, образующих сеть $\mathbf{S}$, и $\beta(\mathbf{S}) = \min \beta(\mathbf{A_i}, \mathbf{A_j})$, $(\mathbf{i} \neq \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{j} = 1,\ldots\mathbf{v})$.

Пусть $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_v)$ – некоторая перестановка номеров вершин из $\mathbf{A}$, а $\boldsymbol{\pi}_\mathbf{A}$ – множество всех таких перестановок, $\mathbf{card}\ (\boldsymbol{\pi}_\mathbf{A}) = \mathbf{v}!$. Тогда, используя метод разрастания сети [2] за счет последовательного, соответственно индексам в $\boldsymbol{\pi}$, подсоединения вершин из $\mathbf{A}$ к сети трассами (т.е. решения $\mathbf{v - 1}$ задачи вида (6)), получим некоторую сеть $\mathbf{S}_\pi$ с показателем надежности $\beta(\mathbf{S})_\pi$. Как и выше, этот показатель может использоваться и в составе ограничений, и определять следующую важную прикладную задачу трассирования транспортных сетей:

$$\textbf{\textit{Найти}} \quad \underset{\pi\in \Pi_\mathbf{A}}{\mathbf{arg\,max}}\, \beta(\mathbf{S})_\pi. \tag{7}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аристова И.В., Смеляков С.В., Яковлев С.В. Элементы теории геометрического проектирования. Киев: Наукова думка, 1995. – 247 с.

2. Смеляков С.В. Топологическое моделирование сетей в задачах геометрического проектирования // Электронное моделирование. – 1993, №3. - С. 83 - 87.