УДК 621.396

В.В. Карпенко, Ямен Хазим

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСА В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СКЛАДСКОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрена задача распределения многономенклатурного ресурса при условии, что его объем ограничен. При этом предполагается, что складская система хранения ресурсов имеет иерархическую структуру. Разработан критерий качества распределения ресурса по элементам структуры, учитывающий затраты на хранение нереализованного ресурса и потери от дефицита. Предложена процедура решения этой задачи. Для решения проблемы высокой размерности использована процедура фазового укрупнения состояний.

Ключевые слова: *многономенклатурная задача управления запасами, распределенная складская система, высокая размерность, фазовое укрупнение состояний.*

Введение

Традиционные методики управления запасами рассматривались применительно к ситуации, когда заказ – непрерывная переменная, которая может принять любое значение в $[0,\infty)$. Эти методики совершенно непригодны в случаях, когда задача решается для неделимых товаров единичного, индивидуального спроса (холодильники, автомобили, стиральные машины и т.п.). Кроме того, обычно предполагается, что реализуемый продукт территориально не распределен, а полностью сосредоточен в пункте реализации, что во многих случаях экономически не целесообразно.

Сформируем задачу отыскания рационального распределения рассредоточенного реализуемого целочисленного ресурса.

Постановка задачи

Для построения формальной модели складской системы в этой ситуации используем математический аппарат теории марковских процессов с дискретным множеством состояний и непрерывным временем [1, 2]. Пусть есть сеть магазинов и оптовая база. Введем:

$\lambda_i, i = 1, 2, ..., т,$ – интенсивность спроса в i-м магазине;

$\mu_i, i = 1, 2, ..., m,$ – интенсивность восполнения запаса торгового зала со склада для i-го магазина;

$\lambda_i^{(c)}$ – интенсивность потока заявок на склад i-го магазина при израсходовании запаса торгового зала;

$\lambda_i^{(Б)}, i = 1, 2, ..., m,$ – интенсивность потока заявок на базу при израсходовании запаса склада i-го магазина;

$\nu_i^{(Г)}, i = 1, 2, ..., m,$ – интенсивность удовлетворения групповой заявки i-го магазина.

Схематически это отображено на рис. 1.

Если считать, что все потоки в такой системе являются пуассоновскими, то её граф состояний и переходов является марковским. При этом, в простейшем частном случае (один магазин с торговым залом и складом) такой граф приведен на рис. 2. Граф ориентирован, его вершины определяют возможные состояния, а дуги помечены значениями интенсивностей переходов:

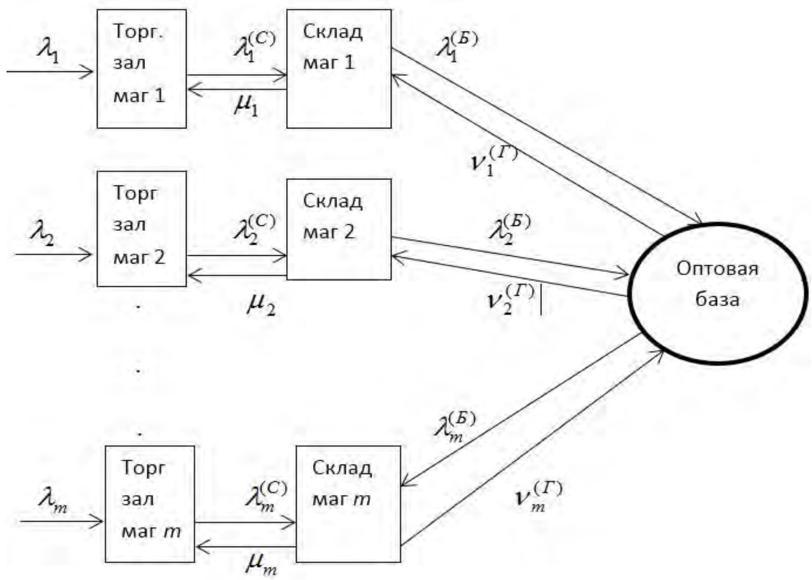

Рис. 1. Модель товаропотоков в системе «оптовая база» – склады магазинов – торговые залы магазинов»: λ – интенсивность спроса, μ – интенсивность восполнения запаса торгового зала, γ – интенсивность пополнения склада магазина за счет ресурса оптовой базы

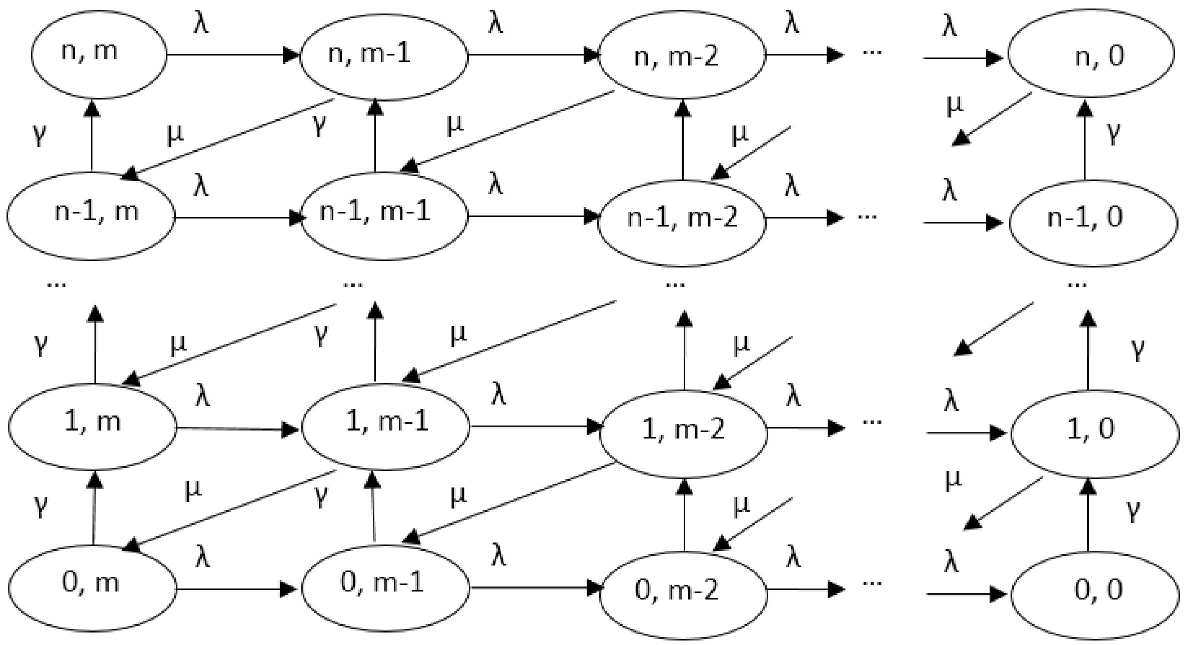

Рис. 2. Граф состояний и переходов для магазина

Каждому состоянию системы соответствует пара чисел (i, j), где i – количество единиц товара на складе магазина $(i = 0,1,2,...,n)$, а j – количество единиц в торговом зале магазина $(j = 0,1,2,...,m)$.

Более простой ситуации, когда пополнение запаса магазина из ресурса оптовой базы происходит в момент полного израсходования товара в магазине, соответствует граф, приведенный на рис. 3.

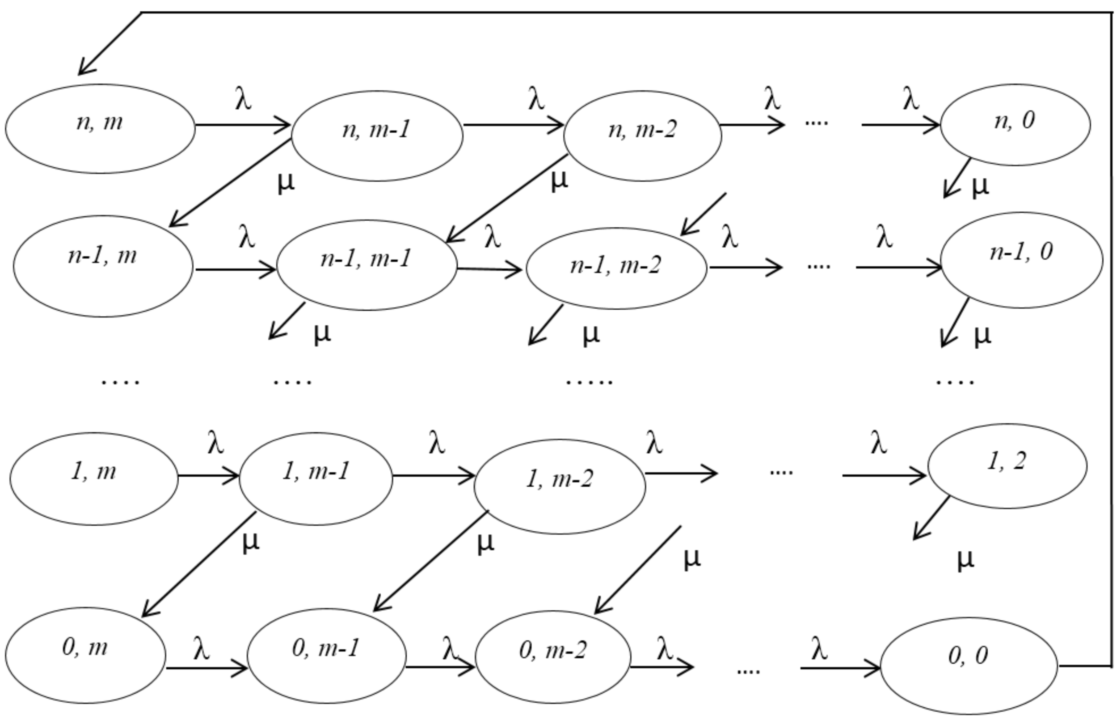

Рис. 3. Граф состояний и переходов в магазине с разовым пополнением ресурса

Дополнительная трудность, возникающая в этой задаче, состоит в следующем. В традиционных задачах управления запасами предполагается, что ресурс поставщика товаров не истощим, и реальные ограничения определяются только возможностями потребителя. В реальных задачах ресурс оптовой базы, поставляющей товар в магазины по каждой из номенклатур, конечен.

С другой стороны, необходимо учитывать быстрый рост числа состояний в такой системе. Если

$\left(m_1, m_2, ..., m_k\right)$ – вектор начальных значений единиц товара для k номенклатуры на складе магазина и m единиц по каждой номенклатуре размещается в торговом зале, то общее число состояний равно

$$N = m^k \prod_{j=1}^{k} m_j.$$

Для реальных значений m и m_j, $j = 1, 2, ..., k$, значение N имеет порядок $10^5 - 10^7$.

Основной результат

Для решения этой задачи используем декомпозиционный подход. При этом решение задачи управления многономенклатурным запасом товаров реализуется следующим образом. Сначала независимо решаются задачи оптимального распределения товара для каждой из номенклатур. Затем полученные условно-оптимальные решения используются в основной задаче с учетом имеющихся ограничений.

Эффективность функционирования системы «склад - магазин - торговый зал магазина» определяется средними суммарными затратами на хранение товара и потерями от дефицита. Введем:

C_C – средние затраты на хранение единицы товара на складе,

C_T – средние затраты на хранение единицы товара в торговом зале,

$C_д$ – средние потери от дефицита.

Тогда средние суммарные потери для одного магазина при реализации товара одной номенклатуры определяются соотношением

$$R(m,n) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(C_c \cdot i + C_T \cdot j)P_{ij} + C_д \cdot P_{00}.$$

Таким образом, средняя величина потерь зависит от распределения вероятностей состояний.

Для решения задачи оптимального распределения товара в системе «склад – магазин – торговый зал» используем систему дифференциальных уравнений Колмогорова относительно искомого набора вероятностей $P_{ij}(t)$, которую получим следующим образом [3].

Для произвольного состояния системы (i_0, j_0) введем $Z^+_{i_0 j_0}$ – множество всех тех состояний системы, из которых возможен непосредственный переход в состояние (i_0, j_0), а также $Z^-_{i_0 j_0}$ – множество тех состояний системы, в которые возможен непосредственный переход из состояния (i_0, j_0).

Тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова будет записана следующим образом:

$$P'_{i_0 j_0}(t) = \sum_{(i,j)\in Z^+_{i_0 j_0}} \lambda_{ij,i_0 j_0} P_{ij}(t) - P_{i_0 j_0}(t) \sum_{(i,j)\in Z^-_{i_0 j_0}} \lambda_{i_0 j_0, ij}, \quad (1)$$

$$i_0 = 0,1,2,...,n;\ \ j = 0.1,2,...,m,$$

где $\lambda_{ij,i_0 j_0}$ – интенсивность перехода из состояния (i, j), в состояние (i_0, j_0),

$\lambda_{i_0 j_0, ij}$ – интенсивность перехода из состояния (i_0, j_0), в состояние (i, j).

Полученная система линейных дифференциальных уравнений легко решается с использованием преобразования Лапласа, реализуемого по формулам [4]:

$$L\left(U(t)\right) = F(s) = \int_0^\infty U(t) e^{-st} dt. \quad (2)$$

$$L\left(U'(t)\right) = sL\left(U(t)\right) - U(0). \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) система дифференциальных уравнений Колмогорова преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений.

Введем

$$\pi_{ij}(s) = L\left(P_{ij}(t)\right), \quad i = 0,1,2,...,n;\ j = 0,1,2,...,m.$$

Тогда преобразованная по Лапласу система (1) примет вид:

$$s\pi_{i_0 j_0}(s) - P_{i_0 j_0}(0) = \sum_{(i,j)\in Z^+_{i_0 j_0}} \lambda_{ij,i_0 j_0} \pi_{ij}(s) - \pi_{i_0 j_0}(s) \sum_{(i,j)\in Z^-_{i_0 j_0}} \lambda_{i_0 j_0, ij}. \quad (4)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений решается (например, по правилу Крамера). Решение имеет вид:

$$\pi_{ij}(s) = \frac{D_{ij}(s)}{D_{ij}(s)}, \quad (5)$$

где $D_{ij}(s), D(s)$ – определители матриц, составленные из коэффициентов перед неизвестными в системе уравнений (4).

Обратное преобразование Лапласа выполняется с использованием разложения дробно-рациональных функций (5) на элементарные дроби. В результате проведения этих операций получим набор функций $P_{ij}(t)$, задающих распределение вероятностей состояний системы на любой момент времени t.

При анализе подобных систем практический интерес представляет не переходной процесс изменения вероятностей состояний системы, а их финальное распределение.

Для получения этого распределения в системе дифференциальных уравнений (1) реализуется предельный переход:

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_{ij},$$

$$\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t) = 0.$$

При этом система дифференциальных уравнений (1) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{(i,j)\in Z^{+}_{i_0 j_0}} \lambda_{ij,i_0 j_0} P_{ij} - P_{i_0 j_0} \sum_{(i,j)\in Z^{-}_{i_0 j_0}} \lambda_{i_0 j_0, ij} = 0, \quad (6)$$

$$i = 0,1,2,...,n; \; i_0 = 0,1,2,...,n;$$

$$j = 0,1,2,...,m; \; j_0 = 0,1,2,...,m.$$

Решение системы уравнений (6) дает стационарное распределение вероятностей состояний системы, которое с использованием (1) позволяет рассчитать эффективность системы.

Описанная простая схема отыскания оптимального распределения товара в иерархической складской системе реализуется, если число состояний невелико.

Однако, в связи с экспоненциальным ростом размерности задачи в зависимости от числа номенклатур и количества единиц товара по каждой из них возникают серьезные вычислительные трудности. Возможный путь решения проблемы состоит в укрупнении состояний марковских цепей [1, 5, 6].

Традиционный подход [1, 3] к анализу систем с использованием эргодических марковских цепей состоит в расчете предельного вектора π вероятностей пребывания системы в n возможных своих состояниях по формуле

$$\pi = \pi \cdot W, \quad W = (p_{ij}), \; (i,j) \in E = \{1,2,...,n\}, \quad (7)$$

где $W = (p_{ij})$ – матрица вероятностей переходов марковской цепи, заданная на множестве возможных состояний системы.

Известно, что технические и вычислительные трудности решения системы линейных алгебраических уравнений (7) быстро растут с увеличением числа состояний системы и для многих практически важных задач (при $n > 100$) становятся трудно преодолимыми [7].

Один из возможных путей решения исходной задачи при большом n состоит в укрупнении состояний марковской цепи. Все множество возможных состояний разбивается на подмножества. Состояния системы нумеруются парой индексов (i, j), где i – номер подмножества, $i = 1,2,...,m$, j – номер состояния в выделенном подмножестве, $j = 1,2,...,n_i$.

Известны вероятности переходов

$$W_{(i_1,j_1)(i_2,j_2)}, \; i_1 \in \{1,2,...,m\}, \; i_2 \in \{1,2,...,m\},$$

$$j_1 \in \{1,2,...,n_{i_1}\}, \; j_2 \in \{1,2,...,n_{i_2}\}.$$

Для каждого из подмножеств независимо решается задача расчета стационарного распределения вероятностей состояний.

При этом, для конкретного, например, i-го, подмножества введем:

$J_i = \{1,2,...,n_i\}$ – множество номеров состояний i-го подмножества,

$\pi_i = \{\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, ..., \pi_{in_i}\}$ – искомый предельный вектор вероятностей состояний i-го подмножества,

$W_i = (W_{ij_1 j_2})$ – матрица вероятностей переходов для состояний i-го подмножества, $j_1 \in J_1$, $j_2 \in J_1$.

Тогда, как известно [1, 5], предельный вектор отыскивается как результат решения векторно - матричного уравнения

$$\pi_i = \pi_i \cdot W_i, \quad (8)$$

дополненного условием нормировки

$$\sum_{j\in J_i} \pi_{ij} = 1. \quad (9)$$

Пусть $\pi_i^{(0)}$ – результат решения системы уравнений (8), (9). Полученный вектор представляет собой набор условных вероятностей пребывания в состояниях i-го подмножества, при условии, что система находится в этом подмножестве.

Найдем теперь распределение вероятностей реализации условий. С этой целью для произвольной пары (i_1, i_2) подмножеств найдем вероятности переходов из i_1 в i_2, а также из i_2 в i_1. Выберем произвольное состояние (i_1, j_1) из подмножества i_1. Вероятность перехода системы из этого состояния в состояния подмножества i_2 определяется формулой

$$W_{(i_1 j_1), i_2} = \sum_{j_2 \in J_{i_2}} W_{(i_1,j_1)(i_2,j_2)}.$$

Тогда вероятность перехода системы из состояний i-го подмножества в состояния i_2-го подмножества рассчитывается следующим образом:

$$Wi_1, i_2 = \sum_{j_1 \in J_1} W_{(i_1,j_1)(i_2 j_2)} \cdot \pi^{(0)}_{i_1 j_1}.$$

Аналогично этому вычисляется вероятность перехода из состояний подмножества i_2 в состояния подмножества i_1:

$$Wi_{\Sigma}, i_1 = \sum_{j_2 \in J_2} W_{(i_2,j_2)(i_1 j_1)} \cdot \pi^{(0)}_{i_2 j_2}.$$

Введем далее предельный вектор вероятностей $R = (r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_m})$ пребывания системы в подмножествах с номерами $i_1, i_2, ..., i_m$, а также матрицу $W = (W_{i_1 i_2})$ вероятностей переходов между подмножествами.

При этом имеем

$$(r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_m}) = (r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_m})(W_{i_1, i_2}).$$

Теперь вычислим предельное распределение вероятностей состояний системы:

$$\pi_{ij} = \pi_{ij}^{(0)} \cdot r_i, \; i = 1, 2, ..., m, \; j = 1, 2, ..., n_i.$$

Описанный прием дает простое решение задачи, которое является точным, если вероятности переходов для каждого конкретного подмножества не зависят от того, из какого подмножества система перешла в это конкретное подмножество. При этом существенным обстоятельством является способ реализации процедуры разбиения на подмножества. В общем случае при кластеризации в каждое из подмножеств попадают объекты, которые в выбранном смысле «близки» (для заданной метрики) между собой.

Таким образом, множество возможных состояний системы разбивается на совокупность подмножеств.

На очередной, например, k-й итерации одно из этих подмножеств выделяется. Состояния каждого из остальных подмножеств укрупняются. Получаемая при этом группа укрупненных состояний вместе с состояниями выделенного подмножества образуют систему состояний, обрабатываемых на этой итерации.

На следующей итерации выделяется другое подмножество, а остальные укрупняются.

Достоинства такой процедуры расчета предельного вектора марковской цепи состоят в следующем.

Во-первых, при этом существенно снижается размерность решаемой на каждом шаге задачи.

Во-вторых, предложенная методика не содержит трудоемкой процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений. Каждая итерация содержит только простейшие операции сложения и умножения вектора на матрицу. Эта процедура позволяет анализировать системы с числом состояний порядка 10^3, далее с ростом размерности задачи реализация этой процедуры становится затруднительной, что мотивирует продолжение исследований.

Выводы

Таким образом, рассмотрена задача управления многономенклатурным запасом для товаров разового спроса. Предложен метод рационального распределения суммарного объема реализуемого товара в иерархической складской системе. При этом для решения многономенклатурной задачи высокой размерности предложена процедура фазового укрупнения состояний. Простота реализации этой процедуры обеспечивает её высокую эффективность.

Список литературы

1. Кемени Дж. Конечные цепи Маркова. / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – М.: Наука, 1970. – 271 с.

2. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. / Е.Б. Дынкин. – М.: Мир, 1964. – 612 с.

3. Раскин Л.Г. Математическое моделирование функционирования сложных систем / Л.Г. Раскин. – Х.: ВИРТА ПВО, 1988. – 177 с.

4. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1974. – 544 с.

5. Королюк В.С. Фазовое укрупнение сложных систем. / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1976. – 293 с.

6. Раскин Л.Г. Анализ марковских цепей с использованием фазового укрупнения состояний / Л.Г. Раскин // Инф. технологии: Наука, техника, технология, образование, здоровье. – Х.: НТУ «ХПИ», 1997. – С. 280-284.

7. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наукова думка, 1983. – 583 с.

Поступила в редколлегию 11.01.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

УПРАВЛІННЯ РОЗПОДІЛОМ РЕСУРСУ У ІЄРАРХІЧНІЙ СКЛАДСЬКІЙ СИСТЕМІ

В.В. Карпенко, Ямен Хазім

Розглянута задача розподілу багатономенклатурного ресурсу у припущенні, що його кількість обмежена. При цьому передбачається, що складська система зберігання ресурсів має ієрархічну структуру. Розроблений критерій якості розподілу ресурсу за елементами структури, який враховує затрати на зберігання нереалізованого ресурсу та втрати від дефіциту. Запропонована процедура розв'язання цієї задачі. Для вирішення проблеми високої розмірності використана процедура фазового укрупнення станів.

Ключові слова: *багатономенклатурна задача управління запасами, розподілена складська система, висока розмірність, фазове укрупнення станів.*

DISTRIBUTED RESOURCE MANAGEMENT IN A HIERARCHICAL STORAGE SYSTEMS

V.V. Karpenko, Yamen Hazim

The problem of resource allocation multiproduct provided that its scope is limited. It is assumed that the storage system has a storage resource hierarchical structure. Criterion quality of resource allocation on the elements of the structure, taking into account storage costs and unrealized losses from resource shortages. A procedure for solving this problem. To solve the problem of high dimension phase procedure used lumping.

Keywords: *multiproduct inventory control problem, a distributed storage system, high dimension, consolidation phase states.*