

УДК 681.78

Л.Ф. Купченко, А.С. Рыбьяк, О.А. Гурин

Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба

## УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ИНФОРМАЦИОННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ НОРМИРОВАННОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ КУЛЬБАКА-ЛЕЙБЛЕРА И ВЕРОЯТНОСТЬЮ ПРАВИЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ

Количественной оценкой эффективности процесса обнаружения в оптико-электронных системах обычно выступает критерий вероятности правильного обнаружения. Однако этот критерий жестко связан с решающим правилом и характеризует качество обнаружителя в целом. Произведено сравнение введенного показателя согласованности оптимальной обработки сигналов – нормированная дивергенция Кульбака-Лейблера с показателем вероятности правильного обнаружения. Полагают, что при появлении нового критерия его качество следует рассматривать по отношению к вероятностным критериям. Этому вопросу посвящена настоящая статья.

**Ключевые слова:** дивергенция Кульбака-Лейблера, динамическая спектральная фильтрация, оптимальная обработка оптических сигналов.

### Введение

Обычно считают, что с появлением нового критерия его возможности необходимо сравнивать с известным критерием, используемым на практике. Этот вопрос в частности обсуждается в работе, посвященной статистической теории распознавания образов [1].

В статье рассматриваются оптико-электронные системы, предназначенные для обнаружения объектов по спектральным признакам. В состав таких систем входит динамический спектральный фильтр, осуществляющий пред-детекторную обработку оптического излучения, и пороговое устройство [2]. Поскольку при синтезе таких систем в основном используется критерий Неймана-Пирсона, то основным показателем оценивания эффективности является вероятность правильного обнаружения. Однако данный критерий жестко связан с решающим правилом и характеризует качество обнаружителя в целом.

В работе [3] авторами настоящей статьи разработан критерий оценки согласованности оптимальной обработки оптических сигналов в оптикоэлектронных системах, осуществляемой динамическим спектральным фильтром. В качестве показателя согласованности предложено использовать нормированную дивергенцию Кульбака-Лейблера, которая представляет собой взаимную информативную меру удаленности друг от друга двух вероятностных распределений на выходе и входе устройства обработки, в данном случае сигналов объекта и фона. Критерием согласованности оптимальной обработки сигналов, выступает признак, состоящий в равенстве единице нормированной дивергенции Кульбака-Лейблера. Нормированная дивергенция Кульбака-Лейблера позволяет определить, в какой степени отклонения параметров сигналов и их корреляционных характеристик от априорных значений влияют на свойства оптимальной обработки оптического излучения.

Целью статьи является исследование взаимосвязи введенного показателя согласованности оптимальной обработки оптических сигналов – нормированная дивергенция Кульбака-Лейблера с показателем вероятности правильного обнаружения.

### Основной раздел

Количественной оценкой эффективности процесса обнаружения обычно выступает критерий вероятности правильного обнаружения. Данный критерий используется на этапе разработки схем обнаружителей и жестко связан с решающим правилом системы. Следовательно, он характеризует не только возможности сигналов и их параметры с точки зрения разделения выборочного пространства, но и сам распознающий аппарат. Если свойства вероятности правильного обнаружения достаточно хорошо известны, то свойства показателя нормированного критерия Кульбака-Лейблера требуют обсуждения. Поскольку при решении задачи обнаружения информация о разделимости сигналов объекта и фона содержится в логарифме от отношения правдоподобия

$$\ln \ell(\vec{X}) = \ln p_{\text{об}}(\vec{X}) - \ln p_{\text{ф}}(\vec{X}), \quad (1)$$

где  $p_{\text{об}}(\vec{X})$ ,  $p_{\text{ф}}(\vec{X})$  – плотности вероятности принятых реализации при условии наличия сигналов объекта и фона соответственно. Тогда ее количество может быть определено через дивергенцию Кульбака-Лейблера, которая представляет собой взаимную меру разделимости (несходства) двух вероятностных распределений сигналов объекта и фона [1, 4].

В общем случае дивергенция Кульбака-Лейблера представляет собой разность математических ожиданий логарифмов отношения правдоподобия (1)  $M_{\text{об}}(\ln \ell(\vec{X})) - M_{\text{ф}}(\ln \ell(\vec{X}))$  при условиях наличия на входе оптико-электронной системы сигналов объекта и фона соответственно [1, 4]:

$$D = \int_{\mathbb{R}} \left[ p_{об}(\bar{X}) - p_{ф}(\bar{X}) \right] \ln \left( \frac{p_{об}(\bar{X})}{p_{ф}(\bar{X})} \right) d\bar{X}. \quad (2)$$

Пусть принимаемые оптико-электронной системой  $k$ -мерные реализации  $\bar{X}$  при условиях наличия сигналов объекта и фона подчинены нормальному закону с соответствующими плотностями:

$$p_{об.вх}(\bar{X}) = N(\bar{\mu}_{об.вх}, \Gamma_{об.вх}); \quad p_{ф.вх}(\bar{X}) = N(\bar{\mu}_{ф.вх}, \Gamma_{ф.вх}),$$

где  $\bar{\mu}_{об.вх}$  и  $\bar{\mu}_{ф.вх}$  – математические ожидания принимаемых реализаций при условиях наличия сигналов объекта и фона соответственно;  $\Gamma_{об.вх}$  и  $\Gamma_{ф.вх}$  – корреляционные матрицы входных сигналов объекта и фона. Тогда взаимная информационная мера – дивергенция Кульбака-Лейблера (2) для сигналов на входе динамического спектрального фильтра  $D_{вх}$  и на его выходе  $D_{вых}$  будут иметь следующий вид [1, 4]:

$$D_{вх} = \frac{1}{2} \left[ \bar{\xi}_{вх}^T (\Gamma_{об.вх}^{-1} + \Gamma_{ф.вх}^{-1}) \bar{\xi}_{вх} + \text{tr}(\Gamma_{об.вх}^{-1} \Gamma_{ф.вх} + \Gamma_{ф.вх}^{-1} \Gamma_{об.вх} - 2I) \right]; \quad (3)$$

$$D_{вых} = \frac{1}{2\sigma_{об}^2 \sigma_{ф}^2} \left[ (\sigma_{об}^2 + \sigma_{ф}^2) \zeta^2 + (\sigma_{об}^2 - \sigma_{ф}^2)^2 \right], \quad (4)$$

где  $\bar{\xi}_{вх} = \bar{\mu}_{об.вх} - \bar{\mu}_{ф.вх}$  – разностный вектор математических ожиданий объекта и фона на входе фильтра;  $I$  – единичная матрица;  $\text{tr}(\bullet)$  – след матрицы;  $\zeta = \bar{F}_н^T \bar{\xi}_{вх}$  – разность математических ожиданий сигналов объекта и фона на выходе динамического спектрального фильтра;  $\sigma_{об}^2 = \bar{F}_н^T \Gamma_{об.вх} \bar{F}_н$  и  $\sigma_{ф}^2 = \bar{F}_н^T \Gamma_{ф.вх} \bar{F}_н$  – дисперсии сигналов объекта и фона на выходе фильтра соответственно. Здесь  $\bar{F} = \|f_i\|$  – вектор фильтра, обеспечивающего обработку оптического излучения.

Будем рассматривать случай, когда корреляционные матрицы входных сигналов объекта и фона равны  $\Gamma_{об.вх} = \Gamma_{ф.вх} = \Gamma_{вх}$ . Тогда выражение для дивергенции на входе фильтра (3) существенно упрощается

$$D_{вх} = \bar{\xi}_{вх}^T \Gamma_{вх}^{-1} \bar{\xi}_{вх} = q_{вх}^2, \quad (5)$$

где  $q_{вх}^2$  есть не что иное, как отношение сигнал-помеха на входе динамического спектрального фильтра [5].

Дивергенция на выходе фильтра (4) при тех же условиях представляет собой отношение сигнал-помеха на выходе фильтра

$$D_{вых} = \frac{\zeta^2}{\sigma^2} = q_{вых}^2, \quad (6)$$

где  $\sigma^2 = \bar{F}_н^T \Gamma_{вх} \bar{F}_н$  – дисперсия сигналов на выходе фильтра.

Таким образом, при равенстве корреляционных матриц входных сигналов объекта и фона отноше-

ние взаимной информационной меры на выходе динамического спектрального фильтра  $D_{вых}$  к ее величине на входе  $D_{вх}$  представляет собой отношение величины сигнал-помеха на выходе оптико-электронной системы  $q_{вых}^2$  к величине сигнал-помеха на входе  $q_{вх}^2$ :

$$R = \frac{D_{вых}}{D_{вх}} = \frac{q_{вых}^2}{q_{вх}^2}. \quad (7)$$

Далее установим зависимость между нормированной дивергенцией Кульбака-Лейблера и вероятностным критерием. Для этого воспользуемся результатами работы [6] в которой приведено соотношение для условной вероятности правильного обнаружения в зависимости от значения вероятности ложной тревоги  $P_{лт}$  и величины отношения сигнал – помеха на выходе устройства обработки  $q_{вых}$

$$P_{по} = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1 - P_{лт}) - q_{вых}), \quad (8)$$

где  $\Phi(\bullet)$  – интеграл вероятности;  $\Phi^{-1}(\bullet)$  – функция обратная интегралу вероятности.

Используя выражения (7) и (8) получим выражение, устанавливающее связь между вероятностью правильного обнаружения и показателем согласованности оптимальной обработки оптических сигналов в оптико-электронных системах с динамической спектральной фильтрацией – нормированной дивергенцией Кульбака-Лейблера

$$P_{по} = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1 - P_{лт}) - q_{вх} \sqrt{R}), \quad (9)$$

С использованием выражения (9) построены графики (рис. 1) при различных значениях вероятности ложной тревоги и отношения сигнал-помеха на входе системы. Графики получены в предположении равенства корреляционных матриц входных сигналов объекта и фона  $\Gamma_{об.вх} = \Gamma_{ф.вх} = \Gamma_{вх}$ .

Построенные на рис. 1 зависимости наглядно отображают взаимосвязь между вероятностью правильного обнаружения  $P_{по}$  и нормированной дивергенцией Кульбака-Лейблера  $R$ . Из анализа графиков видно, что при уменьшении отношения сигнал-помеха на входе оптико-электронной системы цена ошибки при формировании вектора фильтра, обеспечивающего обработку оптических сигналов, существенно возрастает. Так, например, для вероятности ложной тревоги  $P_{лт} = 10^{-5}$  и отношения сигнал-помеха  $q_{вх}^2 = 100$  уменьшение согласованности в два раза практически не влияет на вероятность правильного обнаружения. В то же время при снижении отношения сигнал помеха в два раза уменьшение показателя согласованности в два раза уже приводит к уменьшению  $P_{по}$  в 1,3 раза, а при снижении отношения сигнал помеха в четыре раза – в 5 раз.

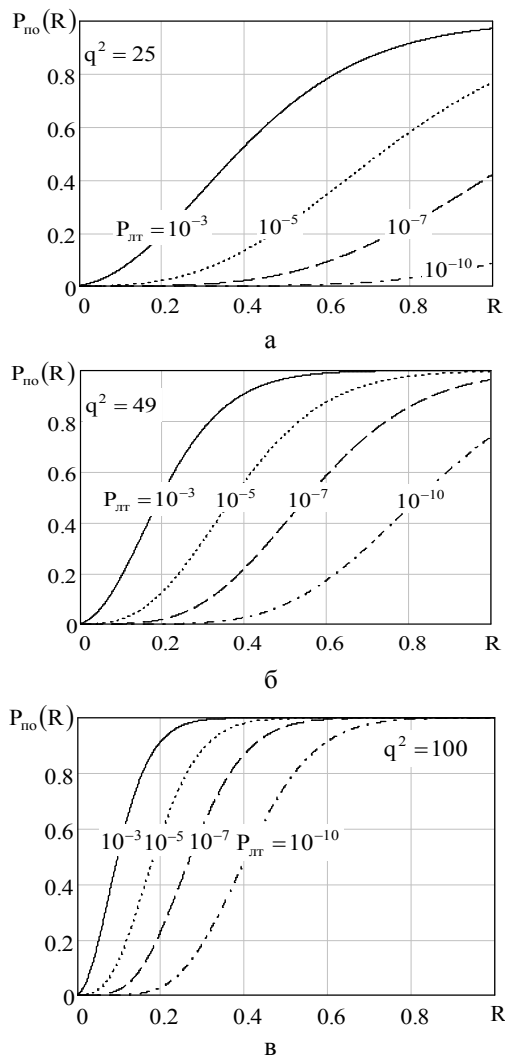


Рис. 1. Зависимости вероятности правильного обнаружения от нормированной дивергенции Кульбака-Лейблера при различных значениях ложной тревоги и следующих значениях отношения сигнал-помеха:  
а –  $q^2 = 25$ ; б –  $q^2 = 49$ ; в –  $q^2 = 100$

## Выводы

Получены зависимости устанавливающие связь между введённым показателем согласованности оптимальной обработки оптических сигналов – нормированная дивергенция Кульбака-Лейблера и вероятностью правильного обнаружения. Зависимости получены в предположении равенства корреляционных матриц входных сигналов объекта и фона  $\Gamma_{об.вх} = \Gamma_{ф.вх} = \Gamma_{вх}$ . Построенные графики отражают связь между вероятностным и информационных показателями при различных значения ложной тревоги и различных значениях отношения сигнал-помеха на входе оптико-электронной системы.

## Список литературы

1. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов: пер с англ. / К. Фукунага. – М.: Наука, 1979. – 367 с.
2. Обнаружение объектов по спектральным признакам в оптико-электронных системах с использованием принципов динамической фильтрации / Л.Ф. Купченко, А.С. Рыбьяк, В.В. Проклов, С.Н. Антонов // Прикладная радиоэлектроника. – 2011. – Том 10, № 1 – С. 22-26.
3. Купченко Л.Ф. Критерий согласованности оптимальной обработки сигналов в оптикоэлектронных системах с динамической спектральной фильтрацией / Л.Ф. Купченко, А.С. Рыбьяк // Системи озброєння і військова техніка. – 2015. – № 1(41). – С. 120-123.
4. Ту Дж. Принципы распознавания образов: пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 411 с.
5. Ширман Я.Д. Теория и техника обработки радиоэлектронной информации на фоне помех / Я.Д. Ширман., В.Н. Манжос. – М.: Радио и связь, 1981 – 416 с.
6. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1983 – 320 с.

Поступила в редакцию 14.12.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Д. Карлов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

## ВСТАНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ІНФОРМАЦІЙНИМ ПОКАЗНИКОМ НОРМОВАНОЇ ДИВЕРГЕНЦІЇ КУЛЬБАКА-ЛЕЙБЛЕРА ТА ЙМОВІРНІСТЮ ПРАВИЛЬНОГО ВИЯВЛЕННЯ

Л.Ф. Купченко, А.С. Риб'як, О.О. Гурін

Кількісною оцінкою ефективності процесу виявлення в оптико-електронних системах зазвичай виступає критерій ймовірності правильного виявлення. Однак цей критерій тісно пов'язаний з розв'язувальним правилом застосування обмежене математичними можливостями. Проведено порівняння введеного показника узгодженості оптимальної обробки сигналів - нормованої дивергенції Кульбака-Лейблера з показниками ймовірності виявлення. Вважають, що при появі нового критерію його якість слід розглядати по відношенню до ймовірнісних критеріям. Цьому питанню присвячена ця стаття.

**Ключові слова:** дивергенція Кульбака-Лейблера, динамічна спектральна фільтрація, оптимальна обробка оптичних сигналів.

## AFFILIATION BETWEEN INFORMATION INDEX KULLBACK-LEIBNER NORMED DIVERGENCE AND PROBABILITY OF DETECTION

L.F. Kupchenko, A.S. Rubiak, O.A. Goorin

The probability of detection criterion usually represents quantitative estimation of the detection efficiency in the electro-optical systems. However, this criterion is rigidly connected to the decision rule and characterizes the overall quality of the detector. The entered index of optimal signal processing matching – normalized Kullback-Leibler divergence has been compared with the index probability of detection. It is believed that when a new criterion appears its quality measure should be considered in relation to the probabilistic criteria. So this article is dedicated to the above mentioned issue.

**Keywords:** Kullback-Leibler divergence, dynamic spectral filtering, optimal processing of optical signals.