

УДК 629.7.015.3/7

С.М. Порошин<sup>1</sup>, О.В. Соловьёв<sup>2</sup>, П.Н. Соляник<sup>3</sup><sup>1</sup> *Национальный технический университет «ХПИ», Харьков*<sup>2</sup> *ГП Чугуевский авиаремонтный завод, Чугуев*<sup>3</sup> *Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ**

*Рассматривается математическая модель, позволяющая получить алгоритм и методику расчёта аэродинамических характеристик тонкого профиля в нестационарной нелинейной постановке задачи. Применение модели позволяет определить особенности физики явлений и исследуемых процессов, а также целенаправленно исследовать процессы обтекания крыльев конечного размаха.*

**Ключевые слова:** летательный аппарат, профиль, модель.

**Введение**

Обеспечение потребных взлётно-посадочных характеристик (ВПХ) летательных аппаратов (ЛА) достигается применением механизации передней и задней кромок крыла. Особенности обтекания крыла и его аэродинамические характеристики при выполнении взлётно-посадочных операций имеют практический интерес при проектировании перспективных летательных аппаратов.

Выявление особенностей аэродинамических характеристик крыла на взлётно-посадочных режимах предполагает использование методик расчёта, построенных в нестационарной нелинейной постановке. Использование таких методик расчёта приводит к большим затратам процессорного времени. С целью выявления особенностей аэродинамических характеристик крыла при его движении с различными углами наклона траектории  $\Theta$  и снижения затрат времени, целесообразно использовать математические модели обтекания профиля. Решение модельных задач позволяет определить особенности физики явлений, исследуемых процессов, и целенаправленно исследовать процессы обтекания крыльев конечного размаха.

**1. Постановка задачи**

Рассматривается тонкий профиль произвольной формы, обтекаемый вязкой несжимаемой жидкостью под углом атаки  $\alpha$  со средней поступательной скоростью  $U_0$  (рис. 1).



Рис. 1. К постановке задачи

Предполагается, что профиль может иметь различные поверхности, выполняющие роль механизации

его передней и задней кромок (предкрылок, отклоняемый носок, щиток, закрылок, интерцептор), имеющих хорду  $b_i$  и отклоняемых на угол  $\delta_i$ , расположенных на расстояниях  $x_i$  от передней кромки профиля. Геометрические характеристики механизации представляются в безразмерных величинах:  $\bar{b}_i = \frac{b_i}{b}$ ,  $\bar{x}_i = \frac{x_i}{b}$ , ( $1 \leq i \leq m$ ), где  $b$  - хорда профиля,  $m$  - количество органов механизации.

Тонкий профиль с элементами механизации рассматривается в связанной системе координат  $Ox$ , начало которой совпадает с носком профиля. Ось  $Ox$  направлена вдоль хорды профиля, её положительное направление совпадает с направлением вектора скорости невозмущённого потока  $\vec{V}_\infty$ . Ось  $Oy$  - перпендикулярна хорде профиля и направлена вверх.

Предполагается, что, начиная с некоторого момента времени  $t = 0$ , граничные условия на профиле изменяются по некоторому закону:

$$\frac{W_n}{U_0} = f(\xi_0, \eta_0, \tau), \quad \xi_0 = \frac{x_0}{b}, \quad \eta_0 = \frac{y_0}{b}, \quad \tau = \frac{U_0 t}{b},$$

где  $x_0, y_0$  - координаты точки на поверхности профиля,  $W_n$  - нормальная составляющая возмущённой скорости,  $\tau$  - безразмерное время.

Изменение граничных условий на поверхности профиля с течением безразмерного времени  $\tau$  вызывает изменение циркуляций скорости присоединённых вихрей, моделирующих поверхность профиля и механизации, что сопровождается сходом свободных вихрей, моделирующих поверхность тангенциального разрыва возмущённой скорости в спутном следе профиля.

В случае, когда профиль оснащён механизацией передней кромки (отклоняемый носок, предкрылок), на умеренных углах атаки  $\alpha$  реализуется безотрывное обтекание его передней кромки. Вихревая пелена в этом случае стекает вниз по потоку только

с задней кромки профиля. Если угол атаки  $\alpha$  велик или отсутствует механизация передней кромки профиля, то на его передней кромке генерируется скорость, численное значение которой стремится в бесконечность, что физически невозможно. Этот факт приводит к генерации тангенциального разрыва скорости (вихревой поверхности) и образованию вихревой пелены, сходящей в поток с передней кромки профиля.

Аналогичный режим обтекания может наблюдаться на отклонённой механизации задней кромки профиля.

Таким образом, в общем случае рассматривается такой режим обтекания тонкого профиля с механизацией, когда вихревая пелена может сходиться со всех кромок профиля и элементов механизации передней и задней кромок, где возмущённые скорости принимают конечные значения.

Решение сформулированной задачи обеспечивается выполнением ряда условий:

1) граничное условие о непротекании профиля и элементов механизации, что заключается в обращении в нуль нормальной составляющей возмущённой скорости жидкости везде на обтекаемой поверхности;

2) условие о неизменности с течением времени циркуляции скорости по замкнутому контуру;

3) выполнение условия Чаплыгина-Жуковско-го-Кутта о конечности скоростей на кромках профиля и его механизации.

## 2. Вихревая модель. Расчёт возмущённых скоростей

Решение задачи об отрывном обтекании профиля с механизацией сопровождается переходным процессом, который вызван изменением граничных условий на поверхности профиля, сопровождаемых образованием вихревых пелен. Из этого, задача об обтекании тонкого профиля с механизацией является нестационарной.

Изменение граничных условий на профиле или его механизации с течением безразмерного времени  $\tau$  вызывает изменение аэродинамических нагрузок, а, следовательно, и циркуляции скорости на профиле и механизации, что в свою очередь сопровождается образованием вихревых пелен  $\delta_1$  и  $\delta_3$  (рис. 1).

Суммарный непрерывно распределённый вихревой слой, моделирующий поверхность профиля и его вихревой след, представляется системой гидродинамических особенностей – дискретными вихрями бесконечной длины с неизменной по длине напряжённостью.

Граничное условие о непротекании поверхности профиля выполняется в контрольных точках, располагаемых между присоединёнными к поверхности профиля дискретными вихрями (рис. 2).

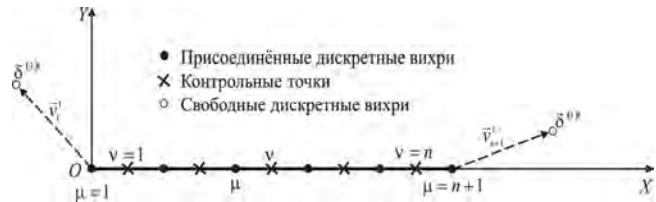


Рис. 2. Вихревая схема профиля

Координаты присоединённых дискретных вихрей определяются выражением:

$$\bar{x}_\mu = \frac{\mu - 0.5}{n}, \quad \bar{y}_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Соответственно, безразмерные координаты контрольных точек:

$$\bar{x}_\nu = \frac{\nu}{n}, \quad \bar{y}_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь  $\mu$  - номер дискретного вихря,  $\nu$  - номер контрольной точки,  $n$  - количество расчётных участков, в рассматриваемом случае их количество совпадает с количеством дискретных вихрей и контрольных точек.

В случае, когда рассматривается обтекание профиля, оснащённого механизацией его кромок (предкрылки, носки, закрылки, щитки), целесообразно использовать нерегулярное распределение присоединённых вихрей и контрольных точек на обтекаемой поверхности. В этом присоединённые вихри и контрольные точки размещаются по хорде профиля и элемента механизации по схеме “cos - cos” (рис. 3):

$$\bar{x}_\mu = \begin{cases} (1 - \bar{b}_p)(1 - \cos((2\mu - 1)/(2n)))0.5; & \mu = 1, 2, \dots, n; \\ (1 - \bar{b}_p) + 0.5\bar{b}_p(1 - \cos((2\mu - n)/(2n_p))); & \mu = n + 1, \dots, n_\Sigma, \end{cases} \quad (3)$$

соответственно, координаты контрольных точек:

$$\bar{x}_\nu = \begin{cases} (1 - \bar{b}_p)(1 - \cos(\nu \pi/n))0.5; & \nu = 1, 2, \dots, n; \\ (1 - \bar{b}_p) + 0.5\bar{b}_p(1 - \cos(\pi(\nu - n)/n_p)); & \nu = n + 1, \dots, n_\Sigma, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\bar{b}_p = b_p/b$  - хорда отклоняемого элемента механизации,  $n$  - количество присоединённых вихрей на профиле,  $n_p$  - количество вихрей на отклоняемом элементе механизации,  $n_\Sigma = n + n_p$  - суммарное количество вихрей на профиле с механизацией.

В общем случае вихревая схема профиля с механизацией и их вихревого следа при отрывном обтекании в расчётный момент времени  $t$  (рис. 4) включает в себя систему присоединённых вихрей на профиле и механизации и систему свободных вихрей (свободные вихри, сошедшие с передней кромки

профиля; свободные вихри, сошедшие с задней кромки профиля и механизации).

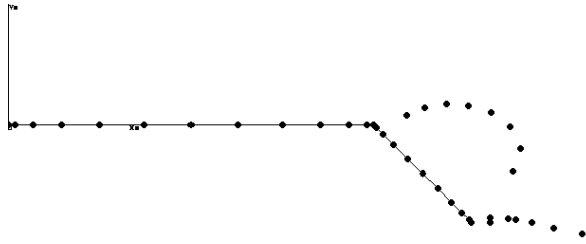


Рис. 3. Вихревая схема профиля с механизацией по схеме “cos - cos”



Рис. 4. Вихревая схема профиля с механизацией и вихревых пелен

Решение задачи об обтекании профиля (отрывном, безотрывном) описывается уравнением неразрывности в форме уравнения Лапласа, граничными условиями на их поверхности, условиями на бесконечности, гипотезой Жуковского-Чалыгина-Кутта, а также заданными параметрами движения. В результате краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), из которых находятся неизвестные циркуляции присоединённых и свободных вихрей.

В основу расчёта возмущённой скорости  $\bar{W}_v$  положено уравнение Био-Савара, обеспечивающее получение возмущённой скорости в произвольной точке пространства от вихря:

$$\bar{W}_v = \frac{\Gamma_\mu}{2\pi r_{v\mu}}, \quad v = 1, 2, \dots, n; \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Здесь  $r_{v\mu}$  - расстояние от контрольной точки  $v$  до дискретного вихря  $\mu$ . таким образом, граничное условие о непротекании поверхности профиля для  $v$ -ой контрольной точки примет вид:

$$\bar{W}_{vn} + U_0 \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

Для получения СЛАУ, из которых определяют неизвестные циркуляции дискретных вихрей на нулевом расчётном шаге интегрирования, используется граничное условие о непротекании профиля  $\bar{W}_{vn} = 0, v = 1, 2, \dots, n$  и теорема Томпсона о постоянстве циркуляции по произвольному контуру, охватывающему тело и его спутный след

$$\Gamma_\mu = C, \quad \mu = 1, 2, \dots, n+1. \quad (7)$$

Так как в начальный момент времени  $t$  профиль находится в состоянии покоя, то  $C = 0$ , а выражение (7) принимает вид:

$$\Gamma_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n+1. \quad (8)$$

СЛАУ с учётом принятых обозначений имеет такой вид:

$$\begin{cases} a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + \dots + a_{1\mu}\Gamma_\mu + \dots + a_{1n}\Gamma_n = -2\pi \sin \alpha; \\ \dots \\ a_{v1}\Gamma_1 + a_{v2}\Gamma_2 + \dots + a_{v\mu}\Gamma_\mu + \dots + a_{vn}\Gamma_n = -2\pi \sin \alpha; \\ \dots \\ a_{n1}\Gamma_1 + a_{n2}\Gamma_2 + \dots + a_{n\mu}\Gamma_\mu + \dots + a_{nn}\Gamma_n = -2\pi \sin \alpha; \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_\mu + \dots + \Gamma_{n+1} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В результате решения СЛАУ (9) определяются значения циркуляций  $\Gamma_\mu$  для случая бесциркуляционного обтекания профиля. Этот случай принято называть нулевым расчётным шагом при моделировании нестационарного обтекания профиля.

В случае безотрывного обтекания передней кромки профиля - моделируется только кормовая вихревая пелена, сходящая в поток из точки, принадлежащей дискретному вихрю  $\mu = n$ . В случае моделирования отрывного обтекания передней кромки профиля, моделируется сход вихревой пелены из точки, принадлежащей дискретному вихрю  $\mu = 1$ .

Рассматривая общий случай – моделирование отрывного обтекания профиля, в точках  $\mu = 1$  и  $\mu = n$ , рассчитываются относительные скорости  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_{n+1}$ , выражения, для определения которых имеют вид:

$$\bar{v}_1^1 = \bar{W}_{1\mu}^0 + \bar{U}_0; \quad \bar{v}_n^1 = \bar{W}_{n\mu}^0 + \bar{U}_0; \quad \mu = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где  $\bar{U}_0$  - безразмерная скорость невозмущённого потока;  $\bar{W}_{1\mu}^0$  и  $\bar{W}_{n\mu}^0$  - безразмерные скорости, индуцируемые всеми дискретными вихрями  $\mu = 1, 2, \dots, n$ , соответственно в точках  $\mu = 1$  и  $\mu = n$  на нулевом шаге интегрирования. Скорости  $\bar{W}_{1\mu}^0$  и  $\bar{W}_{n\mu}^0$  рассчитываются по (5) с некоторой особенностью, заключающейся в том, что при расчёте скорости в точке  $\mu = 1$ , скорость рассчитывается от всех дискретных вихрей, за исключением первого. Аналогично расчёт скорости в точке  $\mu = n$  выполняется для последнего дискретного вихря.

Рассчитав скорости  $\bar{W}_{1\mu}^0$  и  $\bar{W}_{n+1\mu}^0$ , сдвигаются по их направлению свободные дискретные вихри  $\Gamma_1^0$  и  $\Gamma_{n+1}^0$ , моделирующие вихревые пелены, полученные из решения на нулевом расчётном шаге интегрирования, на расстояние  $\Delta = 1/n$ . В результате в потоке появляются первые свободные вихри



Рассчитав циркуляции  $\Gamma_\mu^r$ , можно приступать к определению аэродинамических нагрузок, действующих на профиль, а также расчёту поля возмущённых скоростей в окрестностях профиля.

### 3. Расчёт аэродинамических нагрузок

Расчёт нестационарных аэродинамических нагрузок основан на интеграле Коши-Лагранжа:

$$\Delta \bar{p}_k^r = 2n \cos \alpha \Gamma_\mu^r - 2 \frac{\Delta \Gamma}{\Delta \tau}, \quad (17)$$

$$\mu = 1, 2, \dots, n+1,$$

где  $n$  – количество расчётных участков на поверхности профиля;  $\alpha$  – угол атаки;  $\Gamma_\mu^r$  – суммарная циркуляция присоединённых вихрей на рассматриваемом расчётном шаге интегрирования  $\tau$ .

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta \tau} = \frac{\delta^{(1)r} - \delta^{(1)r-1}}{\Delta \tau} + \frac{\Gamma_\varepsilon^r - \Gamma_\varepsilon^{r-1}}{\Delta \tau}; \quad (18)$$

$$\Delta \tau = 1/n, \quad \varepsilon = 1, 2, \dots, k.$$

Расчёт производной  $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta \tau}$  поясняет рис 7.



Рис. 7. Пояснение расчета производной

Аэродинамические нагрузки рассчитываются в точках профиля, соответствующих присоединённым вихрям  $\mu = 1, 2, \dots, k, \dots, n$ .

Изменение циркуляции  $\Delta \Gamma$  рассматриваются внутри некоторого контура  $L$ , проходящего через точку  $k$  и охватывающего присоединённые вихри  $\mu = 1, 2, \dots, k, \dots, n$ , а также свободные вихри  $\delta^{(1)}$ .

Коэффициент подъёмной силы определяется с помощью выражения:

$$c_{ya} = \Delta \bar{p}_\mu \frac{1}{n}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

а коэффициент момента тангажа:

$$m_z = -\frac{1}{n} \bar{b}_\mu \Delta \bar{p}_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

где  $\bar{b}_\mu$  – расстояние от точки приведения до вихря  $\mu = k$ .

### Вывод

Таким образом, представленная математическая модель позволяет получить алгоритм и методику расчёта аэродинамических характеристик тонкого профиля в нестационарной нелинейной постановке задачи. Применение модели позволяет определить особенности физики явлений и исследуемых процессов, а также целенаправленно исследовать процессы обтекания крыльев конечного размаха.

### Список литературы

1. Соловьев О.В. Анализ процесса формирования вихревых следов за летательным аппаратом [Текст] / О.В. Соловьев, В.Н. Кобрин, В.В. Чмовж // Системы озброєння і військова техніка. – 2013. – № 2 (34). – С. 93-98.
2. Widnall, Sh. E. The structure and dynamics of vortex filament [Text] / Sh. E. Widnall // Annual Rev. Fluid Mech. – 1975. – V. 7. – P. 45-53.
3. Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
4. Петров Е.Г. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик прямоугольных пластин различного удлинения в широком диапазоне углов атаки / Е.Г. Петров, В.Г. Табачников // Труды ЦАГИ. – М.: ЦАГИ, 1974. – Вып. 1621. – С. 102-109.
5. Chang R.Ch. Effect of sunk rate on ground effect of low aspect – ratio wings / R.Ch. Chang, V.U. Muirhead // J. of Aircraft. – 1987. – V. 25, № 3. – P. 122-129.

Поступила в редколлегию 24.02.2016

Рецензент: д-р техн. наук проф. А.Б. Леонтьев, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ ПРОФІЛЮ

С.М. Порошин, О.В. Соловйов, П.Н. Солянік

Розглядається математична модель, що дозволяє отримати алгоритм і методику розрахунку аеродинамічних характеристик тонкого профілю в нестационарній нелінійній постановці завдання. Застосування моделі дозволяє визначити особливості фізики явищ і досліджуваних процесів, а також цілеспрямовано досліджувати процеси обтікання крил кінцевого розмаху.

**Ключові слова:** літальний апарат, профіль, модель.

### MATHEMATICAL MODELING OF FLOW PROFILE

S.M. Poroshin, O.V. Solovyov, P.N. Solyanik

A mathematical model, allowing to get an algorithm and method of calculation of aerodynamic descriptions of fine profile in the non-stationary nonlinear raising of task, is examined. Application of model allows to define the features of physics of the phenomena and probed processes, and also purposefully to probe the processes of flowing around of wings of eventual scope.

**Keywords:** aircraft, type, model.