УДК 681.518:004.312

А.А. Борисенко[1], С.М. Маценко[1], В.Б. Чередниченко[2], С.М. Мальченков[1], А.Н. Савостьян[1]

[1] *Сумский государственный университет, Сумы*
[2] *Сумский филиал Харьковского национального университета внутренних дел, Сумы*

ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК В МИНИМАЛЬНЫХ КОДАХ ФИБОНАЧЧИ

В статье предложен метод исправления независимых ошибок в фибоначчиевых числах, представленных в минимальной форме. В его основу положена теорема, которая показывает, что среди трех смежных единиц фибоначчиевого числа средняя единица является ошибочной. Ее преобразование в ноль приводит к исправлению ошибки. Приведена методика синтеза устройств, исправляющих эти ошибки.

Ключевые слова: *информация, помехоустойчивость, достоверность, фибоначчиевые числа, код Фибоначчи, исправление ошибок.*

Введение и постановка задачи

К системам передачи и обработки информации в настоящее время предъявляются все возрастающие требования к повышению уровня достоверности их работы. Общепризнанным и широко используемым на практике средством ее повышения является помехоустойчивое кодирование. Среди широко известных помехоустойчивых кодов, обнаруживающих ошибки, эффективно на практике могут использоваться и коды Фибоначчи. Их особенностью является то, что они состоят из чисел, порождаемых фибоначчиевой системой счисления [1 – 3]. Коды Фибоначчи относятся к неразделимым помехоустойчивым кодам и способны обнаруживать асимметричные ошибки не только в передаваемой информации, а и в цифровых устройствах, работающих в этих кодах, например, устройствах, построенных на основе быстродействующих счетчиков Фибоначчи [4 – 6]. В результате появляется возможность сквозного контроля процесса передачи и обработки информации в цифровых системах, что не всегда под силу известным помехоустойчивым кодам, которые обычно ориентированы только на передачу информации. Особенно эффективны коды Фибоначчи в асимметричных каналах связи и при обработке информации.

Однако коды Фибоначчи могут не только обнаруживать асимметричные ошибки, а и частично их исправлять. Для этого обычно используются переходы из одной формы представления кодов Фибоначчи – минимальной к другой – максимальной и обратно, требующие для этой цели производить процедуры развертки и свертки [1 – 3]. Это усложняет процесс декодирования фибоначчиевых чисел и увеличивает его время. Чтобы избежать подобных переходов, была поставлена задача исправления ошибок только в фибоначчиевых числах, представленных в минимальной форме, которая и решается в данной работе.

Теоретические предпосылки

В фибоначчиевой системе счисления или коде Фибоначчи веса разрядов чисел представлены числами Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, F_n. Они характеризуются тем, что в них каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел, начиная с третьего.

Для кода Фибоначчи в минимальной форме характерно наличие хотя бы одного 0 между двумя рядом стоящими единицами [1 – 3]. Число фибоначчиевых чисел или их диапазон определяется суммой весов двух старших разрядов [1 – 3]:

$$M = F_n + F_{n-1}, \qquad (2)$$

где F_n – вес n-го разряда числа Фибоначчи; F_{n-1} – вес n-1 разряда числа Фибоначчи. Например, фибоначчиевыми числами будут двоичные комбинации 001010001 и 101010101.

Появление в фибоначчиевых числах двух и более рядом стоящих единиц свидетельствует о наличии в них ошибок, которые легко обнаруживаются, а в некоторых случаях и исправляются [1].

Метод исправления ошибок в кодах Фибоначчи в минимальной форме

Теорема 1. *Если в фибоначчиевом числе в минимальной форме имеется последовательность двоичных символов, состоящая из 3 смежных единиц, то единица, находящаяся между двумя крайними единицами, будет ошибочной и может быть исправлена преобразованием в нуль.*

Доказательство. Если бы одна из крайних единиц последовательности из 3 рядом стоящих единиц была ошибочной, то тогда бы при ее преобразовании в нуль, во время исправления, остались бы две единицы – одна, взятая из оставшейся крайней единицы, и соседней с ней средней. В результате была бы получена запрещенная последовательность, состоящая из двух рядом стоящих единиц, одна из которых ошибочная. Это значит, что в последовательности из 3 единиц имеются две ошибочные единицы, что противоречит условию теоремы, по которому утверждается, что в последовательности из трех единиц может быть только одна ошибочная единица. Только в случае, когда ошибочная единица находится между двумя крайними единицами, условие теоремы будет выполнено, так как при ее преобразовании в нуль запрещенная последовательность из двух стоящих рядом единиц образоваться не может. **Теорема доказана.**

Из теоремы 1 вытекает простой метод исправления одиночной ошибки типа 0 → 1. Для этого последовательно просматриваются разряды фибоначчиевого числа с начала или с конца на предмет выявления в них трех смежных единиц, и при нахождении таковых единица, находящаяся посредине, преобразуется в нуль. В результате при отсутствии других ошибок будут получены правильные фибоначчиевые числа.

Представим данный метод исправления одиночных ошибок типа 0 → 1 в виде следующих шагов:

1. Просматриваются первые справа или слева смежные три разряда фибоначчиевого числа на предмет наличия в них единиц.
2. При наличии в проверяемых трех разрядах двух рядом стоящих единиц подается сигнал об ошибке. Останов.
3. При наличии единиц во всех трех проверяемых разрядах, средняя единица, находящаяся между двумя крайними единицами, преобразуется в нуль. Ошибка исправлена.
4. Если в проверяемых разрядах имеется три нуля или имеется в наличии одна или разделенные нулем две единицы, то просматривается один смежный новый и два старых смежных соседних разряда, и ищутся в них единицы. Переход к пункту 2.
5. И так идет проверка до последних в числе трех разрядов. Если там имеются три единицы, то происходит исправление ошибки. После этого считается, что обнаруживаемых ошибок в фибоначчиевом числе нет. Останов.

Данный алгоритм в строго асимметричных каналах связи с возможными ошибочными переходами типа 0 → 1 исправляет в фибоначчиевом числе все одиночные ошибки в разрядах, состоящих из трех рядом стоящих единиц. Такие каналы со строгой асимметрией, хоть и редко, но встречаются. Вообще же все каналы связи, в той или иной степени, асимметричны.

Повышенной асимметрией обладают также и цифровые устройства, так как там переход элементов микросхем из 0 в 1 и из 1 в 0 соответствуют разным уровням порогов напряжения помех, приводящих к ошибкам.

Представляет интерес оценка суммарного количества комбинаций 101 в фибоначчиевых числах того или иного диапазона, и их процент по отношению к суммарному числу нулей во всех фибоначчиевых числах данного диапазона. Это число определяет максимально возможное число ошибочных переходов 0 в 1. Тогда можно будет говорить о величине исправляющей способности того или иного кода Фибоначчи.

Количество нулей в разных диапазонах фибоначчиевых чисел P, и их процент по отношению ко всему количеству двоичных символов h показаны в табл. 1.

Таблица 1

Суммарное число нулей
в кодах Фибоначчи разной длины

n	P	h	Сумма нулейd	%
***n*=3**	5	15	10	66,667
***n*=4**	8	32	22	68,750
***n*=5**	13	65	45	69,231
***n*=6**	21	126	88	69,841
***n*=7**	34	238	167	70,168
***n*=8**	55	440	310	70,455
***n*=9**	89	801	566	70,662
***n*=10**	143	1440	1020	70,833
***n*=11**	232	2563	1819	70,972
***n*=12**	377	4524	3216	71,088
***n*=13**	610	7930	5645	71,185
***n*=14**	986	13818	9848	71,269
***n*=15**	1596	23955	17090	71,342
***n*=16**	2584	41344	29522	71,406
***n*=17**	6765	71077	50793	71,462
***n*=18**	10945	121770	87080	71,512
***n*=19**	17710	207974	148819	71,557
***n*=20**	28657	354220	253610	71,597
***n*=21**	46367	601797	431086	71,633
***n*=22**	75025	1020096	731064	71,666
***n*=23**	121392	1725575	1237175	71,696
***n*=24**	196418	2913432	2089632	71,724
***n*=25**	317811	4910450	3523224	71,750
***n*=26**	514228	8263086	5930666	71,773
***n*=27**	832039	13884183	9968122	71,795
***n*=28**	1346268	23297092	16730830	71,815
***n*=29**	2178309	39041772	28045192	71,834
***n*=30**	3524578	65349290	46954300	71,851

Из табл. 1 видно, что суммарное количество нулей d в диапазоне фибоначчиевых чисел и их процент с ростом разрядности фибоначчиевых чисел n растет.

На рис. 1 приведен график, отображающий эту тенденцию роста числа нулей. Процент единиц r при этом легко находится в графике как разница между ста процентами и процентом нулей.

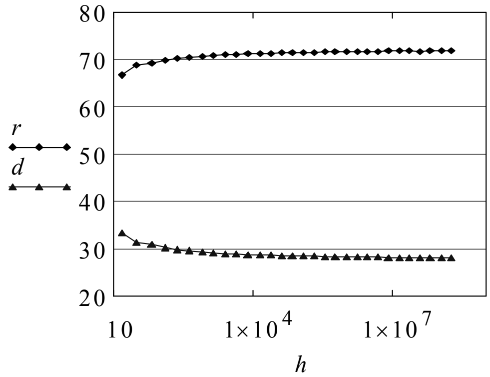

Рис. 1. График роста суммарного количества нулей и единиц в коде Фибоначчи

Чтобы теперь найти процент исправляемых ошибок по отношению ко всем возможным ошибочным переходам 0 в 1 в разных диапазонах фибоначчиевых чисел нужно знать количества комбинаций 101 в них.

В табл. 2 показаны эти количества.

Таблица 2

Сумма исправляемых ошибок в фибоначчиевых числах разных диапазонов

n	P	Сумма нулей d	Сумма исправл. ошибок F	%
***n*=6**	21	88	10	11,36
***n*=7**	34	167	20	11,98
***n*=8**	55	310	38	12,26
***n*=9**	89	566	71	12,54
***n*=10**	143	1020	130	12,75
***n*=11**	232	1819	235	12,92
***n*=12**	377	3216	420	13,06
***n*=13**	610	5645	744	13,18
***n*=14**	986	9848	1308	13,28
***n*=15**	1596	17090	2285	13,37
***n*=16**	2584	29522	3970	13,45
***n*=17**	4181	50793	6865	13,52
***n*=18**	6765	87080	11822	13,58
***n*=19**	10945	148819	20284	13,63
***n*=20**	17710	253610	34690	13,68
***n*=21**	28657	431086	59155	13,72
***n*=22**	46367	731064	100610	13,76
***n*=23**	75025	1237175	170711	13,80
***n*=24**	121392	2089632	289032	13,83
***n*=25**	196418	3523224	488400	13,86
***n*=26**	317811	5930667	823800	13,89
***n*=27**	514228	9968122	1387225	13,92
***n*=28**	832039	16730830	2332420	13,94
***n*=29**	1346268	30347492	3919061	13,97
***n*=30**	2178309	46954300	6566290	13,98

Из табл. 2 видно, что наблюдается постепенный рост суммарного количества потенциально исправляемых ошибок с ростом диапазонов фибоначчиевых чисел *P*. На рис. 2 этот рост отображен в наглядном виде в виде соответствующего графика. Как видно из него суммарное число исправляемых ошибок для диапазонов фибоначчиевых чисел с минимальной формой, указанных в табл. 2, изменяется примерно от 9 и до 14 процентов. Причем этот рост постепенно замедляется с ростом количества фибоначчиевых чисел в диапазонах. Следует предположить, что и для диапазонов, выходящих по величине за рамки табл. 2, будет наблюдаться аналогичная тенденция. Это значит, что в процентном отношении количество исправляемых ошибок в фибоначчиевых числах с минимальной формой представления не будет выходить за 15 процентов.

Как следует из описанного выше метода, в его основе лежит, кроме теоремы 1, еще и просмотр в фибоначчиевом числе следующих друг за другом последовательностей из 3 смежных разрядов, отличающихся только в одном разряде. Так, например, после последовательности разрядов 1 2 3 должна анализироваться последовательность 2 3 4 и так далее до последнего n-го разряда.

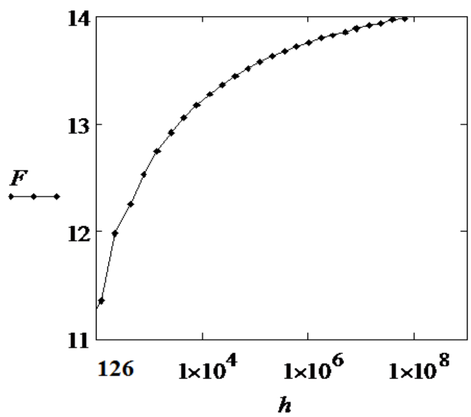

Рис. 2. График роста суммарного количества потенциально исправляемых ошибок

Возникает вопрос, о числе таких последовательностей из 3 разрядов в фибоначчиевом числе длины n. От ответа на него зависит как скорость анализа фибоначчиевых чисел на предмет обнаружения исправляемых ошибок, так и величина аппаратурных затрат, необходимых для схемной реализации данного метода.

Теорема 2. *Число всех возможных анализируемых последовательностей из 3 разрядов в n – разрядном фибоначчиевом числе равно n – 2.*

Доказательство. Допустим, что имеется n – разрядное фибоначчиевое число, в котором сначала анализируются первые 3 разряда 1, 2, 3, затем следующие по порядку разряды 2, 3, 4 после них 3, 4. 5 и так далее до разрядов n – 2, n – 1, n. Разобьем порядок этого анализ на два пути – первый состоит из выбора последовательности 1, 2, 3, за ней 3, 4, 5 и так до n, если n нечетное число и до n – 1, если n – число четное. Второй путь состоит из выбора последовательностей 2, 3, 4, потом 4, 5, 6 и далее до n, для n четного, и до n – 1, для n нечетного. Очевидно, что и для одного и для другого пути число последовательностей из 3 разрядов будет на 1 меньше числа входящих в пути разрядов. Так как оба пути охватывают в сумме все n разрядов анализируемого числа, и в каждом из них число последовательностей будет на 1 меньше числа выбираемых ими разрядов, то общая сумма последовательностей по три разряда будет равна n – 2. **Теорема доказана.**

В табл. 3 представлены количества N возможных перебираемых двоичных последовательностей из 3-х разрядов в фибоначчиевых числах с минимальной формой для их различных длин n. Очевидно, что эти количества линейно зависят от разрядности фибоначчиевых чисел. При этом анализ перебираемых 3-разрядных последовательностей не гарантирует обнаружение среди них хотя бы одной последовательности, состоящей из 3 разрядов, с единицами, а значит и необходимости исправления ошибки.

Таблица 3

Количество перебираемых в фибоначчиевом числе последовательностей из 3-х разрядов

n	N	n	N
n=3	1	**n=17**	15
n=4	2	**n=18**	16
n=5	3	**n=19**	17
n=6	4	**n=20**	18
n=7	5	**n=21**	19
n=8	6	**n=22**	20
n=9	7	**n=23**	21
n=10	8	**n=24**	22
n=11	9	**n=25**	23
n=12	10	**n=26**	24
n=13	11	**n=27**	25
n=14	12	**n=28**	26
n=15	13	**n=29**	27
n=16	14	**n=30**	28

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий метод синтеза устройства, исправляющего ошибки в фибоначчиевых числах.

В общем виде логические выражения для схем исправляющих ошибки, как следует из теоремы 1, имеют вид: F1 = X1X2X3, F2 = X2X3X4, F3 = X3X4X5, …, F(n-2) = Xn – 2, Xn – 1, Xn. Сигналы F1, F2, F3, …, F(n-2) с выходов этих схем подаются на схемы исправления ошибок, например, на входы установки в ноль соответствующих триггеров регистра. Очевидно, что за один проход всех n разрядов фибоначчиевого числа ошибки могут появиться в соответствие с теоремой 2 не более чем в n – 2 случаях. Например, в пятиразрядном фибоначчиевом числе одиночные ошибки могут появиться не более чем в 5 – 2 = 3 случаях. Для их выявления понадобится три функции F1, F2, F3, реализованных на схемах И, каждая из которых имеет три входа. С их помощью за один проход можно исправить все 3 возможные ошибочные переходы 0 → 1.

Можно также исправлять ошибки на основе схем их обнаружения. В этом случае сначала строятся схемы обнаружения ошибок, например, для пятиразрядных фибоначчиевых чисел с помощью выражений: f1 = X1X2, f2 = X2X3, f3 = X3X4, f4 = X4X5. С их выходов сигналы f1, f2, f3, f4 по два объединяются с помощью трех двухвходовых схем И в соответствии с логическими выражениями – F1 = f1f2, F2 = f2f3, F3 = f3f4. Достоинство такой схемы исправления ошибок состоит в том, что она позволяет одновременно обнаруживать и исправлять одиночные ошибки типа 0 → 1.

Используя полученные функции исправления ошибок, можно относительно легко построить регистр Фибоначчи с исправлением ошибок. На рис. 3 для примера показан подобный 3-разрядный регистр, исправляющий одиночную ошибку в виде 1, появляющуюся в среднем триггере при одновременном наличии единиц в крайних триггерах.

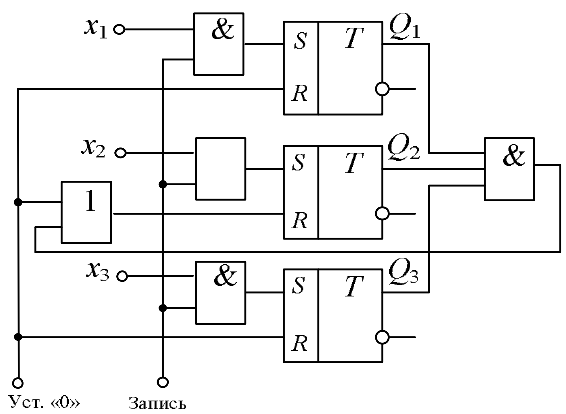

Рис. 3. Трехразрядный регистр, исправляющий одиночную ошибку

В этом случае схема И, на которую заведены единичные выходы всех 3 триггеров выработает 1, которая, поступая через схему ИЛИ на вход установки в 0 среднего триггера, переведет его в нулевое состояние. В результате регистр из неверного состояния 111, перейдет в правильное состояние 101.

Рассматриваемый регистр из 3-х триггеров содержит наименьшее их количество, при которых еще возможно исправление ошибки. Поэтому в нем для исправления ошибки используется всего одна схема И. При наличии двух разрядов, данный метод уже не работает. Для большего количества разрядов в регистре n и соответственно числе триггеров потребуется соответственно большее числосхем И, равное N, определяемое из табл. 2. Так, как следует из этой таблицы, для регистра из 24 триггеров понадобится 22 схемы И. Соответственно, они позволяют исправить максимальное количество ошибок равное 12. Правда, вероятность такого события чрезвычайно мала, так как необходимо, чтобы правильное фибоначчиевое число из 24 разрядов имело вид 10101 … 101, а неправильное - 11111 … 111, что хотя и возможно, но маловероятно.

Наибольшее количество ошибок, исправляемых данным методом, будет в асимметричных каналах с одиночными ошибками в виде переходов 0 → 1, так как именно в них наиболее вероятно появление последовательностей с тремя единицами. Эти ошибки могут появиться в фибоначчиевых числах, имеющих в своем составе две единицы, разделенные нулем. Например, такими числами будут 00101 или 10101. Их количество, как показал анализ, для различных длин фибоначчиевых чисел будет около 10 – 15 процентов. Соответственно и количество обнаруживаемых ошибок данным методом от их общего количества не будет превышать данной величины. При этом следует учитывать, что нулей в фибоначчиевых числах в разы больше чем единиц, и поэтому переход нуля в единицу более вероятный, чем обратный переход единицы в нуль даже для симметричного канала. Поэтому и в симметричных каналах будет происходить близкий к заявленной величине процент исправление ошибок.

Заключение

В данной работе был предложен метод исправления ошибок в кодах Фибоначчи. Он сводится к преобразованию в нуль средней с трех стоящих рядом единиц фибоначчиевого числа. При этом предполагается, что только одна из этих единиц может быть ошибочной. Доказано, что такой единицей может быть только средняя единица. Не исключено, что в фибоначчиевом числе может быть несколько групп из трех смежных единиц, в каждой из которых произошла одиночная ошибка. Все эти ошибки исправимы по приведенному выше алгоритму. Это значит, что код Фибоначчи в минимальной форме обладает пусть и небольшой, но исправляющей способностью асимметричных ошибок типа 0 → 1. Для данного метода исправления ошибок важно и то, что для него просто реализуется декодирующее устройство, что позволяет сделать его надежным и экономичным.

Таким образом, использование помехозащитных свойств минимальных кодов Фибоначчи в системах передачи и обработки информации позволяет исправлять в группах из трех смежных единиц независимые ошибки типа 0 → 1 без дополнительного избыточного кодирования, что может увеличить достоверность получаемой приемником информации и ускорить процесс ее получения.

Список литературы

1. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерений: / А.П. Стахов. – М.: Сов. радио, 1972. – 288 с.

2. Стахов А.П. Коды Фибоначчи и золотой пропорции как альтернатива двоичной системы счисления. Часть 2 / А.П. Стахов // Germany: Academic Publishing. – № 2. – 2012. – 318 p.

3. Стахов А.П. Кодирование данных в информационно-регистрирующих системах: /А. П. Стахов, Б.Я. Лихциндер, Ю.П. Орлович, Ю.А. Старожил. – К.: Техника, 1985. – 127 с.

4. Борисенко А.А. Об одном методе счета в коде Фибоначчи / А.А. Борисенко, А.П. Стахов // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. 2011. –№. 3. – С. 141-149.

5. Борисенко А.А. Об одном способе построения счетчиков Фибоначчи / А.А. Борисенко, А.П. Стахов, С.М. Маценко, В.В. Сиряченко // Вісник Сумського державного університету. – 2012. –№ 3. – С. 165-170.

6. Пат. на корисну модель 89153 Україна, МПК (2014) H03K 23/00. Лічильник імпульсів / О.А. Борисенко, С.М. Маценко; заявн. Сумський державний університет. – № u201313302; заявл. 15.11.2013; опубл. 10.04.2014; Бюл. №7. – С. 1 – 5.

Поступила в редколлегию 16.03.2016

Рецензент: д-р физ-мат наук, проф. А.С. Опанасюк, Сумский государственный университет, Сумы.

ВИПРАВЛЕННЯ ПОМИЛОК У МІНІМАЛЬНИХ КОДАХ ФІБОНАЧЧІ

О.А. Борисенко, С.М. Маценко, В.Б. Чередніченко, С.М. Мальченков, А.М. Савостьян

У статті запропоновано метод виправлення одиночних незалежних помилок у фібоначчієвих числах, заданих в мінімальній формі. В його основу покладена теорема, яка показує, що серед трьох суміжних одиниць фібоначчієвого числа середня одиниця є помилковою. Її, перетворення в нуль призводить до виправлення помилки. Наведена методика синтезу пристроїв, які виправляють ці помилки.

Ключові слова: *інформація, стійкість перед перешкодами, достовірність, фібоначчієві числа, код Фібоначчі, виправлення помилок.*

CORRECTION OF ERRORS IN MINIMAL FIBONACCI CODES

A.A. Borisenko, S.M. Matsenko, V.B. Cherednichenko, S.M. Malchenkov, A.N. Savostyan

In the article about the single error correction method in Fibonacci numbers presented in minimal form. It is based on the assumption that only one unit is incorrect among three adjacent units of the Fibonacci numbers. It is proved that such a unit may be the average unit standing between two end units, which translates into a zero results in an error correction. Spend devices synthesis method of correcting single errors in the three groups of related units as without error detection and to detect them.

Keywords: *information, noise immunity, reliability, Fibonacci numbers, Fibonacci code, fixing bugs.*