УДК 004.3:517.98:621.3.037.372.3

А.В. Ізмайлов[1], Л.Б. Петришин[1,2]

[1] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ*
[2] *AGH Науково-технологічний університет, Краків, Польща*

ТРІЙКОВІ СИМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ЦИФРОВІЙ ОБРОБЦІ ІНФОРМАЦІЇ

Визначено місце ортогональних перетворень серед інших методів аналізу та синтезу цифрових сигналів. Наведено аналітичний вираз та графіки трійкових симетричних функцій. Синтезовано аналітичний вираз ортонормованої системи трійкових симетричних функцій. Проаналізовано можливість застосування розробленої системи трійкових симетричних функцій для подання інформаційних потоків на основі ортогональних перетворень. Обґрунтовано перспективність та необхідність подальших розробок ортогонального та вейвлет-перетворення на основі трійкових симетричних функцій.

Ключові слова: *цифрова обробка інформації, трійкові симетричні функції.*

Вступ

Аналіз та синтез цифрових сигналів є одним із ключових розділів перетворення форми та цифрової обробки інформації, перелік галузей застосування якої постійно розширюється. Відповідно, розробка та удосконалення інструментарію аналізу та синтезу цифрових сигналів, зокрема ортогональних та вейвлет-перетворень, є актуальним та перспективним науковим завданням.

Метою дослідження є визначення місця ортогональних перетворень серед інших інструментів аналізу та синтезу цифрових сигналів, а також розробка системи трійкових симетричних функцій ортонормованих на проміжку $[0,1)$ та перевірка можливості її застосування для подання інформаційних потоків на основі ортогональних перетворень.

Новизна отриманих результатів полягає у розробці ортонормованої системи трійкових симетричних функцій та перевірці можливості її застосування для подання інформаційних потоків на основі ортогональних перетворень.

Методи аналізу та синтезу стаціонарних і нестаціонарних цифрових сигналів

Стаціонарними визначають сигнали з незмінним у часі спектральним наповненням [1]. При аналізі та синтезі таких сигналів немає необхідності у часовій інформації, оскільки усі спектральні складові присутні у сигналі протягом періоду його спостереження.

Одним із методів аналізу та синтезу стаціонарних сигналів є перетворення Фур'є. Дане перетворення має неперервну та дискретну форми, однак, найбільш уживаними є так звані алгоритми швидкого перетворення Фур'є. Відповідно до вимог конкретної системи цифрової обробки інформації, у даній системі імплементують той чи інший алгоритм швидкого перетворення Фур'є. Властивості описаних форм перетворення Фур'є та їх застосування проаналізовані у літературних джерелах [1, 2, 3].

Окрім перетворення Фур'є для аналізу та синтезу стаціонарних цифрових сигналів використовуються ортогональні перетворення, які забезпечують подання цифрового сигналу у вигляді коефіцієнтів розкладу за конкретним базисом. Серед перетворень даного класу необхідно виділити перетворення Уолша та Хаара, що застосовують у обробці та стисненні зображень [2]. Окрім цього, властивості перетворень Уолша та Хаара дозволили розробити алгоритми відповідних швидких перетворень, які ефективно використовуються поряд із алгоритмами швидкого перетворення Фур'є [2, 3].

Однією з властивостей перетворення Фур'є та інших ортогональних перетворень є те, що такі перетворення дозволяють виділити спектральні компоненти сигналів, але не дозволяють локалізувати дані компоненти у часовій області [1, 4].

Нестаціонарними визначають сигнали, у яких спектральні компоненти змінюються в функції часу [1]. Для аналізу та синтезу нестаціонарних сигналів перетворення Фур'є (як і інші ортогональні перетворення) може використовуватись лише у випадку, якщо в умовах заданої системи цифрової обробки інформації часом існування спектральних компонент сигналу можна знехтувати.

Одним із методів аналізу та синтезу нестаціонарних сигналів є віконне перетворення Фур'є, яке дозволяє аналізувати нестаціонарні сигнали типу кусково-стаціонарних. Відповідно, з деякою точністю, яка регулюється шириною вікна перетворення, можливо отримати спектрально-часове представлення сигналу. Однак, віконне перетворення Фур'є володіє істотним недоліком, зумовленим так званою проблемою роздільної здатності, що обмежує його застосування у системах цифрової обробки інформації [1, 4].

Іншою групою методів аналізу та синтезу нестаціонарних сигналів є вейвлет-перетворення, що можуть бути імплементовані у системах цифрової обробки інформації, для яких застосування віконного перетворення Фур'є є обмеженим [1, 4]. Вейвлет-перетворення розрізняють за формою (неперервне або дискретне) та материнським вейвлетом [4]. Материнським вейвлетом визначена функція, яка є основою довільного вейвлет-перетворення [1, 4]. До даної функції у процесі згортки застосовують операції масштабування та зсуву у часовій області.

Трійкові симетричні функції

Існує практика застосування трійкової симетричної логіки у цифрових пристроях обробки інформації [5]. Однак, трійкові симетричні функції, які породжують відповідну систему числення та логіку, на даний час обмежено застосовуються в практиці перетворення форми та цифрової обробки інформації. Трійкові симетричні функції задаються аналітичним виразом [6]:

$$\mathrm{Ter}(n,x) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 0 \le \mathrm{modh}(x + \frac{3^n - 1}{2}, 3^{n+1}) < 3^n, \\ 1, \text{ якщо } 3^n \le \mathrm{modh}(x + \frac{3^n - 1}{2}, 3^{n+1}) < 2 \cdot 3^n, \\ -1, \text{ якщо } 2 \cdot 3^n \le \mathrm{modh}(x + \frac{3^n - 1}{2}, 3^{n+1}) < 3^{n+1}, \end{cases} \quad (1)$$

де n – порядковий номер функції, x – цілочисельний аргумент, $\mathrm{modh}(x,p)$ – допоміжна функція, задана аналітичним виразом

$$\mathrm{modh}(x,p) = \begin{cases} \mathrm{mod}(x,p) + p, \text{ якщо } x < 0, \\ \mathrm{mod}(x,p), \quad \text{ якщо } x \ge 0, \end{cases}$$

де $\mathrm{mod}(x,p)$ – функція залишку від ділення числа x на число p.

Графіки трійкових симетричних функцій перших трьох порядків наведено на рис. 1.

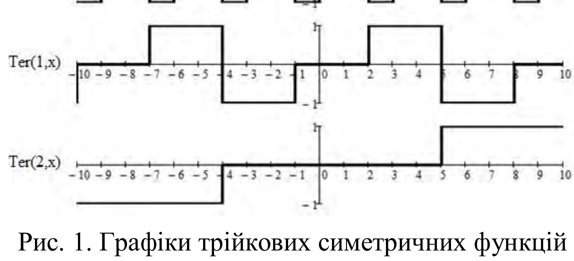

Рис. 1. Графіки трійкових симетричних функцій перших трьох порядків

Трійкові симетричні функції у вигляді (1) непридатні для подання інформаційних перетворень на основі ортогональних перетворень, які базуються на трійкових симетричних функціях. З метою побудови ортогонального перетворення на їх основі необхідно побудувати систему трійкових симетричних функцій ортонормованих на проміжку $[0,1)$, подібно до функцій Хаара та Уолша [2].

Для отримання трійкових симетричних функцій ортонормованих на проміжку $[0,1)$ з трійкових симетричних функцій заданих у вигляді (1) необхідно звести проміжок, на якому дані функції періодичні, до проміжку $[0,1)$. З графіків трійкових симетричних функцій, заданих виразом (1) (рис. 1), випливає, що дані функції мають різні періоди. Крім того, очевидним є збільшення періоду функції з ростом її порядку. Залежність величини періоду функцій (1) від порядку функції випливає з графіків даних функцій (рис. 1) і може бути задана аналітичним виразом

$$T_{Ter}(i) = 3^{i+1}, \quad (2)$$

де $T_{Ter}(i)$ – період трійкової симетричної функції, i – порядок функції.

У зв'язку з тим, що трійкові симетричні функції у вигляді (1) мають різні проміжки періодичності, для отримання системи трійкових симетричних функцій періодичних на проміжку $[0,1)$ виникає необхідність використання єдиного проміжку періодичності для всіх функцій. Очевидним є те, що в якості даного єдиного проміжку може слугувати проміжок періодичності функції максимального порядку, який використовується у даній системі цифрової обробки інформації. Таке рішення породжує потребу введення наборів трійкових симетричних функцій, які будуть визначати максимальний порядок функції і, відповідно, проміжок періодичності для усіх функцій набору.

У зв'язку із залежністю (2) доцільно ввести набори трійкових симетричних функцій у вигляді

$$n = \log_3 N, \quad (3)$$

де n – порядок набору, N – кількість функцій у наборі.

Якщо задати набори трійкових симетричних функцій у вигляді (3), то довжина проміжку періодичності для нульового набору складе 3, для першого – 27, для другого – 19683. Якщо виразити дані величини у вигляді степенів числа 3, то отримана послідовність матиме наступний вигляд: 3^1, 3^3, 3^9. Очевидно, що величина показників степенів у даній послідовності теж є послідовністю степенів числа 3: 3^0, 3^1, 3^2, тобто показниками степенів даної послідовності є номери порядків набору. Отже, довжина проміжку періодичності для кожного набору трійкових симетричних функцій може бути представлена у вигляді залежності від номеру порядку набору

$$T = 3^{3^n}, \tag{4}$$

де T – довжина проміжку періодичності n-го набору трійкових симетричних функцій.

Співвідношення (4) дозволяє визначити проміжок періодичності n-го набору трійкових симетричних функцій як $[0, 3^{3^n})$. Для перетворення значення з проміжку $[0,1)$ у значення з проміжку $[0, 3^{3^n})$ необхідно значення з проміжку $[0,1)$ помножити на $[0, 3^{3^n})$. За допомогою описаного перетворення можна перетворити безрозмірний час з проміжку $[0,1)$ у аргумент функцій заданих формулою (1), тобто реалізувати перехід до функцій періодичних на проміжку $[0,1)$. Система трійкових симетричних функцій періодичних на проміжку $[0,1)$ задається аналітичним виразом.

$$\mathrm{Ter01}(n, \theta, i) = \mathrm{Ter}(i, \theta * 3^{3^n}), \tag{5}$$

де $n = \log_3 N$, – порядок набору базисних функцій теоретико-числових перетворень, N – кількість функцій у наборі, $\theta = \frac{t}{T}$, – параметр часу, тобто час, нормований до інтервалу T, t – поточне значення часу, $i = 0,1,2,...,N-1$ – порядковий номер функції, $\mathrm{Ter}(i, \theta)$ – трійкові симетричні функції задані формулою (1).

Система функцій (5) ортогональна, але не ортонормована. Це випливає з рівності нулю інтегралів (6) – (8) та додатності інтегралів (9) – (11), а також із принципів побудови трійкових симетричних функцій, які дозволяють поширити результати отримані для першого набору на всю множину функцій.

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01}(1,u,0) * \mathrm{Ter}(1,u,1)du = 0. \tag{6}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01}(1,u,1) * \mathrm{Ter}(1,u,2)du = 0. \tag{7}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01}(1,u,0) * \mathrm{Ter}(1,u,2)du = 0. \tag{8}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01}(1,u,0) * \mathrm{Ter}(1,u,0)du = \frac{2}{3}. \tag{9}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01}(1,u,1) * \mathrm{Ter}(1,u,1)du = \frac{2}{3}. \tag{10}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01}(1,u,2) * \mathrm{Ter}(1,u,2)du = \frac{2}{3}. \tag{11}$$

З інтегралів (9) – (11) випливає, що норма функцій (5) рівна $\frac{2}{3}$. Відповідно до цього, ортонормована на проміжку $[0,1)$ система трійкових симетричних функцій може бути задана аналітичним виразом

$$\mathrm{Ter01Norm}(n, \theta, i) = \frac{\mathrm{Ter}(i, \theta * 3^{3^n})}{\sqrt{\frac{2}{3}}}. \tag{12}$$

Система (12) є ортонормованою на проміжку $[0,1)$. Це випливає з рівності нулю інтегралів (13) – (15) та рівності одиниці інтегралів (16) – (18). Аналогічно до системи (5), висновки отримані для першого набору функцій системи (12) можуть бути узагальнені для всієї системи функцій, звідки випливає ортонормованість усієї системи (12) на проміжку $[0,1)$.

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01Norm}(1,u,0) * \mathrm{TerNorm}(1,u,1)du = 0. \tag{13}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01Norm}(1,u,1) * \mathrm{TerNorm}(1,u,2)du = 0. \tag{14}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01Norm}(1,u,0) * \mathrm{TerNorm}(1,u,2)du = 0. \tag{15}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01Norm}(1,u,0) * \mathrm{Ter}(1,u,0)\mathrm{Norm}du = 1. \tag{16}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01Norm}(1,u,1) * \mathrm{TerNorm}(1,u,1)du = 1. \tag{17}$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ter01Norm}(1,u,2) * \mathrm{TerNorm}(1,u,2)du = 1. \tag{18}$$

Застосування трійкових симетричних функцій для подання інформаційних потоків на основі ортогональних перетворень

Ортогональне перетворення деякого одновимірного сигналу за його дискретними значеннями має загальний вигляд [7]:

$$Y = MX, \tag{19}$$

де $Y = [Y(0), Y[1], ...Y[N-1]^T$ – N-компонентний вектор спектральних коефіцієнтів перетворення, M – ортогональна матриця розміру $N \times N$ дискретних значень функцій, за якими здійснюється перетворення, одержаних в точках $\theta = \frac{s}{N}$, $s = 0,1,2,...,N-1$, $X = [X(0), X[1], ...X[N-1]]^T$ – N-компонентний вектор дискретних значень одновимірного сигналу, для якого здійснюється перетворення.

Із загальної форми ортогонального перетворення (19) випливає, що кількість функцій, які використовуються для здійснення перетворення, повинна бути рівна кількості дискретних значень одновимірного сигналу для якого здійснюється розклад. Крім цього, максимальна кількість змін значення серед згаданих функцій повинна бути рівна $N-1$. Іншими словами, серед функцій, які використовуються для здійснення перетворення, жодна не повинна змінювати своє значення більше, ніж $N-1$ раз.

Ортогональне перетворення може бути реалізоване лише за допомогою ортонормованої системи функцій [29].

У зв'язку з цим, для дослідження застосування системи трійкових симетричних функцій у ортогональних перетвореннях, необхідно використовувати систему трійкових симетричних функцій у вигляді (12).

Однак, система трійкових симетричних функцій (12), незважаючи на ортонормованість на проміжку $[0,1)$, не може бути використана для ортогонального перетворення одновимірного сигналу навіть для випадку трьох дискретних значень даного сигналу.

Це пов'язано з тим, що максимальна кількість змін значення функціями у кожному з наборів перевищує кількість функцій у даному наборі. Як наслідок, ортогональну матрицю перетворення одновимірного сигналу в межах кожного з наборів трійкових симетричних функцій побудувати неможливо. Даний факт вказує на необхідність дослідження системи функцій (12) на повноту та у випадку неповноти системи здійснити пошук способів модифікації даної системи з метою застосування трійкових симетричних функцій для подання інформаційних потоків на основі ортогональних перетворень.

Також існує необхідність подальших розвідок у напрямі розробки трійкового симетричного вейвлет-перетворення.

Висновки

У рамках проведеного дослідження визначено місце ортогональних перетворень серед інших методів аналізу та синтезу цифрових сигналів.

Побудовано систему трійкових симетричних функцій ортонормованих на проміжку $[0,1)$.

Проаналізовано можливість застосування розробленої системи функцій для подання інформаційних потоків на основі ортогональних перетворень.

Обґрунтовано перспективність та необхідність подальших розробок ортогонального та вейвлет-перетворення на основі трійкових симетричних функцій з метою застосування їх ефективного застосування у цифровій обробці інформації.

Список літератури

1. Polikar R. The Wavelet Tutorial / R. Polikar. – Iowa State University of Science and Technology, 1996. – 79 с.

2. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л.А. Залманзон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

3. Petryshyn L.B. Theory of digital data processing in the ICT / L.B. Petryshyn // In monography Advances in ICT for Business, Industry and Public Sector. Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 157-170.

4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.

5. Hayes B. Third Base. [Електронний ресурс] / B. Hayes // American Scientist – 2001. – V. 89. – №6. – Режим доступу до ресурсу: http://www.americanscientist.org/issues/pub/third-base/.

6. Izmailov A. Effectiveness analysis of bases and function systems used in digital information processing / A. Izmailov // Збірник тез 52 конференції студентських наукових кіл Гірничо-металургійної академії імені Станіслава Сташіца у Кракові. – Краків, 2015. – С. 281.

7. Петришин Л. (Petryshyn L.) Про фазову взаємозалежність і можливість редукції системи функцій Уолша / Л. Петришин // International Journal of Computing. – 2013. – V. 12, issue 2, ISSN 1727-6209. – P. 125-132.

Надійшла до редколегії 22.02.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.А. Борисенко, Сумський державний університет, Суми.

ТРОИЧНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ

А.В. Измайлов, Л.Б. Петришин

Определено место ортогональных преобразований среди других методов анализа и синтеза цифровых сигналов. Приведены аналитическое выражение и графики троичных симметричных функций. Синтезировано аналитическое выражение ортонормированной системы троичных симметричных функций. Проанализирована возможность использования разработанной системы троичных симметричных функций для представления информационных потоков на основе ортогональных преобразований. Обоснована перспективность и необходимость дальнейшей разработки ортогонального и вейвлет-преобразования на основе троичных симметричных функций.

Ключевые слова: *цифровая обработка информации, троичные симметричные функции.*

SYMMETRIC TERNARY FUNCTIONS AND THEIR APPLICATION IN DIGITAL INFORMATION PROCESSING

A.V. Izmailov, L.B. Petryshyn

Place of orthogonal transforms was determined among the methods of analysis and synthesis of digital signals. Recurrence relation for symmetric ternary functions and graphs of these functions were given. The analytical expression for the orthonormal system of symmetric ternary functions was synthesized. Application of the developed orthonormal system for representation of informational flows using orthogonal transforms was analyzed. Further researches of orthogonal and wavelet transforms based on symmetric ternary mother wavelet were determined as promising.

Keywords: *digital information processing, symmetric ternary functions.*