

УДК 519.85

И.В. Лысенко, В.О. Бутенко

Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СРЕДСТВАМИ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В сравнительном отношении рассматриваются наиболее популярные системы компьютерной математики на предмет решения задач оптимизации различных классов.

Ключевые слова: оптимизация, система компьютерной математики, Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad.

Введение

В практике принятия решений в самых разных областях человеческой деятельности приходится сталкиваться с задачами, относящимися к классу оптимизационных. Например, проблемы оптимизации тепловых, газовых, электрических, компьютерных и др. сетей связаны фундаментальными свойствами таких абстрактных математических объектов, как графы. Таким образом, решая задачу выбора оптимальной структуры графа, мы, по сути, получаем решение заданной практической проблемы.

Существует множество методов, алгоритмов и программных средств решения задач оптимизации. В этой связи справедливо ожидать возможности решения данных задач системами компьютерной математики (СКМ), которые представляют собой специализированные программные пакеты решения математических задач самого разного характера. К числу популярных СКМ относятся Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad. Кроме того, широкими возможностями для решения оптимизационных задач обладает табличный процессор Excel.

Степень обширности классификации задач оптимизации определяется количеством рассматриваемых классификационных признаков. В данной работе в качестве базовых признаков выделим тип получаемого решения и число критериев оптимизации (целевых функций). С точки зрения первого признака будем рассматривать задачи *непрерывной* и *дискретной* оптимизации. В свою очередь, непрерывная оптимизация с точки зрения линейности/нелинейности целевой функции и ограничений может быть *линейной* и *нелинейной*. При этом последняя может быть *условной* и *безусловной*. Также с точки зрения количества переменных целевой функции говорят об *одномерной* (одна переменная) и *многомерной* (более одной переменной) оптимизации. При этом задачи линейной оптимизации всегда относятся к числу многомерных, а задачи нелинейной оптимизации могут быть как одномерными, так и многомерными. Относительно второго признака

речь идёт об *однокритериальной* и *многокритериальной* оптимизации.

В этой связи **цель статьи** состоит в том, чтобы проанализировать наиболее популярные системы компьютерной математики на предмет возможности решения в их рамках задач оптимизации разных классов.

Задачи оптимизации, решаемые системами компьютерной математики

A. Matlab. В этой СКМ имеется возможность решения практически всех типов (в соответствии с принятой классификацией) задач непрерывной оптимизации. Так, встроенные функции пакета Optimization Toolbox, ассоциированного с Matlab, позволяют получать в общем случае локально-оптимальные решения (в случае задач выпуклой оптимизации локальный оптимум, очевидно, будет и глобальным) следующих типов задач: задачи линейного и смешанного линейного программирования; задач одно- и многомерной условной и безусловной нелинейной оптимизации, в том числе задачи квадратичного программирования (в этом случае целевая функция - квадратичная, а ограничения - линейные).

Так, для решения задач безусловной многомерной нелинейной оптимизации используются метод Нелдера-Мида (относящийся к числу безградиентных) и квазиньютоновские методы (использующие информацию о градиенте), основанные на аппроксимации матрицы Гессе (один из них – BFGS-метод (назван по имени его авторов – Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno)).

Что касается задач условной нелинейной оптимизации, то в пакете Optimization Toolbox используется метод последовательного квадратичного программирования (SQP-метод), основанный на квадратичной аппроксимации функции Лагранжа, учитывающей ограничения.

Ещё один пакет - Global Optimization Toolbox - расширяет возможности пакета Optimization Tool-

бох для решения задач оптимизации. С помощью встроенных функций этого пакета могут решаться задачи оптимизации с высокой степенью нелинейности и с плохой обусловленностью, не поддающиеся решению с помощью классических методов оптимизации. В частности, это касается задач оптимизации с недифференцируемыми целевыми функциями и целевыми функциями, имеющими разрывы.

Кроме того, с помощью встроенной функции *gamultiobj*, входящей в состав пакета Global Optimization Toolbox, можно решать задачи многокритериальной оптимизации на основе генетического алгоритма, реализованного в этой функции, а также, как утверждают разработчики пакета, - задачи стохастической оптимизации.

В то же время, система *Matlab* не содержит встроенных функций для решения задач дискретной (комбинаторной) оптимизации [1]. Некоторые исследователи стремятся восполнить этот пробел путём разработки собственных функций. Так, например, система *Matlog*, являющаяся расширением *Matlab*, содержит встроенные функции для решения некоторых задач дискретной оптимизации, интерпретируемых как задачи теории графов, а именно: задача коммивояжёра, задача нахождения кратчайшего пути графа, задача отыскания потока сети минимальной стоимости, задача нахождения минимального остовного дерева. В [2] дано описание пакета *Graph Theory Toolbox*, разработанного харьковчанином профессором С.П. Иглиным.

В данном пакете представлены функции для решения таких задач, как несимметричная задача коммивояжёра, задача нахождения максимального потока в сети, задача о максимальном паросочетании, задача отыскания минимального остовного дерева, задача нахождения минимального вершинного покрытия и др. Некоторые из этих функций, а также функции, предложенные в [3, 4] для решения задач коммивояжёра, о назначении, о покрытии множества, 0,1-задачи о рюкзаке, основаны на использовании встроенной функции *binprog*, с помощью которой решается задача булевого линейного программирования (БЛП). В основу этой функции, присутствующей в более ранних версиях системы *Matlab*, положен алгоритм, основанный на методе ветвей и границ. Возможность использования данной функции обусловлена тем обстоятельством, что некоторые задачи дискретной оптимизации, в том числе, задачи, интерпретируемые в рамках теории графов, могут быть представлены как задачи БЛП.

В версиях системы *Matlab*, начиная с R2014a, для решения задачи БЛП, являющейся частным случаем задачи целочисленного ЛП (ЦЛП), может быть использована функция *intlinprog* созданная для решения задач смешанного ЛП, когда некоторые аргументы целевой функции должны удовлетворять

требованию целочисленности (очевидно, что в случае, когда это требование распространяется на все аргументы целевой функции, то имеет место классическая задача ЦЛП).

Б. Mathematica. В этой СКМ реализовано базовое множество функций (*LinearProgramming*, *Minimize*, *NMinimize*, *FindMinimum*, *Maximize*, *NMaximize*, *FindMaximum*), комбинации которых позволят пользователю решать основные типы задач линейной, также нелинейной (условной и безусловной) оптимизации.

Функции *LinearProgramming*, *Minimize*, *Maximize* позволяют решать задачи линейной оптимизации, используя симплекс-метод либо же метод внутренней точки (*interior point method*), в случае решения задачи ЦЛП – метод ветвей и границ. Примером использования функции *Maximize* может служить решение задачи о рюкзаке.

Функции *NMinimize*, *NMaximize* используют различные итеративные методы (*derivative-free iterative methods*) для решения задач нелинейной оптимизации, например метод Нелдера-Мида. *FindMinimum* и *FindMaximum* позволяют решать задачи нелинейной локальной оптимизации путем использования итерационных методов на основе производных, например, метода Левенберга-Марквардта либо градиентного метода.

Использование встроенного расширения *Combinatorica* СКМ *Mathematica* позволяет использовать около 450 функций для построения и исследования графов, и как следствие, представлены функции решения задач дискретной оптимизации, интерпретируемых как задачи теории графов, среди которых *Dijkstra*, *ShortestPath*, *MinimumSpanningTree*, *NetworkFlow*, *TravelingSalesman* [5].

Следует отметить, что на платформе *Mathematica* разработано множество коммерческих продуктов, сконцентрированных непосредственно на решении задач оптимизации. Одним из наиболее ярких примеров являются пакеты *Global Optimization 9*, *MathOptimizer 2* и *MathOptimizer Professional 3*, совместимые с версиями *Mathematica 8* и *Mathematica 9* [6].

Б. Maple. Для решения задач оптимизации в этой СКМ реализованы следующие пакеты:

Global Optimization,
Optimization [7],
Simplex,

а также в случае решения задач на графах:

Network,
Graph Theory [8].

С помощью команд *LPSolve*, *QPSolve*, *NLPSolve*, содержащихся в пакете *Optimization*, можно получить решение задач линейного, квадратичного и нелинейного программирования соответственно.

Однако существуют некоторые ограничения. К примеру, спецификация метода, в случае использования команд *LPSolve* и *QPSolve*, возможна только в случае решения задач непрерывного программирования. В данном случае предложено использование двух методов: *activeset* и *interiorpoint*, первый из которых реализует метод активных множеств, а второй – метод внутренней точки.

В случае если метод не определен, пакет по умолчанию будет использовать второй метод. Задачи ЦЛП с использованием команды *LPSolve* решаются методом ветвей и границ. В данном случае также возможно использование дополнительных опций *assume*, *binaryvariables* либо *integervariables*, позволяющих наложить ограничения неотрицательности искомого значения (*assumennonneg*), определить, что переменные имеют бинарные (*binaryvariables*) или целочисленные (*integervariables*) значения.

В случае решения задач нелинейной оптимизации (*NLPSolve*) пользователю доступны следующие методы:

quadratic,
branchandbound,
modifiednewton,
nonlinearsimplex,
pcg
sqp.

В основе команды *quadratic* лежит использование метода квадратичной интерполяции, принимающий допущение о том, что целевая функция имеет непрерывную производную первого порядка;

branchandbound – метод ветвей и границ, использующий условие Липшица;

modifiednewton – модифицированный метод Ньютона, для использования которого необходимо явное определение, в матричном виде, градиента целевой функции;

nonlinearsimplex – нелинейный симплекс-метод (метод Нелдера-Мида), рекомендован к использованию в случае повышенных условий точности решения;

pcg – квазиньютоновский метод сопряженных градиентов с предопределенными условиями ограничения памяти, доступный в случае отсутствия общих ограничений;

sqp – метод последовательного квадратичного программирования.

Пакет *Simplex* содержит в себе команды, позволяющие решать задачи линейной оптимизации при помощи симплекс-метода, а именно *minimize* (определение минимума функции), *maximize* (максимум функции), *feasible* (проверка на существование решения для данной системы ограничений) и другими командами позволяющими выполнять операции, реализующие отдельные шаги симплекс-метода.

Для работы с графами в *Maple* ранее был представлен пакет *Networks*, однако разработчиками предложена также его более новая альтернатива – пакет *Graph Theory*. Данные пакеты представляют собой наборы команд для построения, преобразования, проверки различных свойств графов, поддерживающие работу как с ориентированными, так и неориентированными графами.

Базовыми алгоритмами для решения задач оптимизации, реализованными в пакете *Graph Theory* являются:

DijkstrasAlgorithm, *BellmanFordAlgorithm* и *ShortestPath* (для определения кратчайшего пути в графе),

MinimalSpanningTree, *KruskalsAlgorithm* и *PrimsAlgorithm* (определение остова с минимальным весом в неориентированном графе),

TravelingSalesman (решение задачи коммивояжера).

Г. Mathcad. Для численного решения задач поиска локального минимума или максимума в *Mathcad* представлены встроенные функции *Minner*, *Minimize* и *Maximize*. В случае решения задачи линейной оптимизации *Mathcad* по умолчанию использует опцию *Linear*, реализующую метод ветвей и границ. В случае решения задач нелинейной оптимизации предусмотрена возможность выбора метода: метод сопряженных градиентов, Левенберга-Марквардта либо же квазиньютоновский метод. В отличие от рассмотренных выше СКМ, в *Mathcad* не предусмотрено специальное расширение для работы с графами, однако пользователь может достаточно гибко использовать встроенный мощный графический редактор [9]. Однако, как было отмечено ранее, фактически пользователь может сформулировать задачи на графах в терминах ЦЛП и использовать рассмотренные выше функции. Функциональные возможности *Mathcad* могут быть существенно расширены за счёт использования динамически подключаемых библиотек, разработанных с использованием высокоуровневых языков программирования.

Д. Excel. В состав этой программной системы входит надстройка «Поиск решения», с помощью которой могут быть решены задачи однокритериальной линейной и нелинейной (условной и безусловной) оптимизации. Так, для решения *гладких* задач нелинейной оптимизации используется метод обобщённого понижающего градиента, а для *негладких* задач – эволюционный алгоритм; для решения ЗЛП используется симплекс-метод (при этом ЗЛП может содержать до 200 переменных и до 600 ограничений). Что касается задач дискретной оптимизации (в частности, задач на графах), то те из них, которые могут быть сведены к ЗЛП, решаются симплекс-методом. Например, это относится к та-

ким задачам, как задача о назначении, 0,1-задача о рюкзаке, задача определения кратчайшего пути между двумя вершинами в неполном графе, задача коммивояжера.

Стоит заметить, что задача коммивояжера может быть решена и с помощью эволюционного алгоритма, однако в этом случае даже для небольшого числа вершин (5-10) нет гарантии, что полученное решение будет оптимальным, а не лишь близким к нему [10].

Заключение

Наиболее популярные СКМ (Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad), а также система Excel располагают мощными средствами решения задач оптимизации различного типа. При этом разные СКМ для решения оптимизационных задач одного типа используют порой одинаковые методы (алгоритмы). Так, например, в СКМ Mathematica, Maple, Matlab для решения задач нелинейной безусловной многомерной оптимизации применяется метод Нелдер-Мида, а для решения задачи линейной оптимизации - симплекс-метод (этот метод также реализован в ПС Excel). Другой пример: в СКМ Mathematica и Maple задача ЦПП решается методом ветвей и границ.

Что касается задач дискретной оптимизации, в частности, интерпретируемых в терминах теории графов, то среди рассмотренных СКМ специально предусмотренными для этого возможностями располагают Mathematica и Maple; система Matlab такими возможностями не располагает, но позволяет решать задачи дискретной оптимизации, сводимые к задаче БЛП.

Среди рассмотренных СКМ возможностями для решения задач многокритериальной оптимизации располагают Maple, Mathematica и Matlab.

Одним из авторов статьи было установлено [11], что решение одной и той же системы дифференциальных уравнений с помощью различных СКМ даёт разные результаты. В связи с этим возникает предположение о том, что если попытаться решить одну и ту же оптимизационную задачу с помощью одного и того же метода (алгоритма), реализован-

ного в разных СКМ, то и результат, возможно, будет разным. Результатам проверке этого предположения планируется посвятить очередную статью.

Список литературы

1. Иглин С.П. Решение некоторых задач теории графов в MATLAB / С.П. Иглин // *Exponenta Pro. Математика в приложениях*. – 2004. – № 4(4). – С.28-33.
2. Иглин С.П. Математические расчёты на базе MATLAB / С.П. Иглин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 640 с.
3. Лысенко И.В. Анализ возможностей решения задач дискретной оптимизации средствами систем компьютерной математики / И.В. Лысенко, В.О. Бутенко // *Системи обробки інформації*. – Х.: ХУПС. – 2013. – Вип. 5 (112). – С. 96-101.
4. Лысенко И.В. О решении задач дискретной оптимизации в системе компьютерной математики MATLAB / И.В. Лысенко // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. – Х.: НАКУ «ХАИ», 2013. – № 2(61). – С. 86-93.
5. Wolfram Mathematica 9 Documentation center [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://reference.wolfram.com/mathematica/Combinatorica/tutorial/Combinatorica.html>.
6. Wolfram Product. All Mathematica Applications. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.wolfram.com/products/fields>.
7. Maple. Online Help. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Optimization/General/Methods>.
8. Morgan M. Introduction to Maple's GraphTheory Package. [Текст] / M. Morgan. – MapleSoft. Maple Conference 2013 Proceedings, 2013. – P. 1-22.
9. PTC User's Guide. Mathcad 14.0 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.scribd.com/doc/3239532/Mathcad-14-Users-Guide>.
10. Вежелис Т.М. Решение оптимизационных задач в среде MS Excel 2013 / Т.М. Вежелис, А.Б. Гордеев, А.Ю. Грозов. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2014. – 50 с.
11. Availability assessment of computer systems described by stiff Markov chains: case study [Text] / V. Kharchenko, O. Odarushchenko, V. Odarushchenko, P. Popov // *Springer*. – CCIS (412). – 2013. – P. 112-135.

Поступила в редакцию 16.03.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

АНАЛІЗ МОЖЛИВОСТЕЙ РІШЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЗАСОБАМИ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

І.В. Лисенко, В.О. Бутенко

У порівняльному відношенні розглядаються найбільш популярні системи комп'ютерної математики на предмет рішення задач оптимізації різних класів.

Ключові слова: оптимізація, система комп'ютерної математики, Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad

ANALYSIS OF COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS APPLICABILITY FOR SOLVING THE OPTIMIZATION PROBLEMS

I.V. Lysenko, V.O. Butenko

The most popular off-the-shelf computer algebra systems for solving of optimization problems of different types are considered comparatively.

Keywords: optimization, system of computer mathematics, Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad.