УДК 517

Г.О. Старець, Л.І. Курпа

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків

ПРО МОМЕНТИ ТА ЗНАЧЕННЯ ДЕЯКИХ АТОМАРНИХ ФУНКЦІЙ

Атомарні функції - це фінітні нескінченно диференційовані розв'язки деяких диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. Зокрема атомарні функції $UP_m(x)$ є досить таки зручний і перспективний сучасний апарат щодо застосування в різноманітних областях науки і техніки. Так, наприклад, використання функцій $UP_m(x)$ є ефективним при розв'язанні крайових задач. Зауважимо, що перше систематичне дослідження атомарних функцій було здійснено В.О. Рвачовим.

Ключові слова: *атомарні функції, фінітні розв'язки, рівняння з відхиленням аргументу.*

Вступ

Функції $UP_m(x)$ – це фінітні нескінченно диференційовані розв'язки диференціально-функціонального рівняння:

$$y'(x) = 2\sum_{k=1}^{m}\left[y(2mx+2m-2k+1) - \right.$$
$$\left. - y(2mx-2x+1)\right]. \tag{1}$$

Для кожного $m = 1, 2, \ldots$ існує і єдине фінітне, с носієм $[-1, 1]$ рішення рівняння (1). Це рішення позначається $UP_m(x)$. Випадок $m = 1$ розглянув В.О. Рвачов. У цьому випадку $UP_1(x) = UP(x)$. Основні властивості функцій $UP_m(x)$ наведені в роботі [3]. Тут ми наведемо формули для обчислення моментів і значень функцій $UP_m(x)$. Ці формули актуальні у зв'язку з можливістю їх застосування в обчислювальних методах.

Основна частина

1. Нехай $\mu_n^{(m)}$ – момент порядку n функції $UP_m(x)$, тобто

$$\mu_n^{(m)} = \int_{-1}^{1} x^n UP_m(x)dx\,. \tag{2}$$

Оскільки $UP_m(x)$ – парна функція, то моменти непарного порядку, очевидно, дорівнюють нулю. Крім того $\mu_0^{(m)} = 1$, для усіх m.

Теорема. Моменти $\mu_{2n}^{(m)}$ – раціональні числа, що визначаються рекурентною формулою ($n = 1, 2, \ldots$):

$$\mu_{2n}^{(m)} = \frac{(2n)!}{m^2\left((2m)^{2n}-1\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{l=1}^{m}(2l-1)^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\mu_{2n-2k}^{(m)}\,, \tag{3}$$

Доведення.

Нехай $F_m(t)$ – перетворення Фур'є функції $UP_m(x)$. Безпосередньо з відомих властивостей перетворення Фур'є випливає, що

$$F_m^{(n)}(0) = i^n \int_{-1}^{1} x^n UP_m(x)dx\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Тому,

$$F_m^{(2n)}(0) = (-1)^n \int_{-1}^{1} x^{2n} UP_m(x)dx = (-1)^n \mu_{2n}^{(m)}\,. \tag{5}$$

Скориставшись представленням $F_m(t)$ у вигляді

$$F_m(t) = \frac{2}{mt}\sum_{k=1}^{m}\sin\left(\frac{2m-2k+1}{2m}t\right)F\left(\frac{t}{2m}\right), \tag{6}$$

а також тим, що функція $F_m(x)$ є цілою функцією експоненціального типу і, тим самим, є аналітичною функцією, розкладемо ліву і праву частину рівності (5) у ряд Тейлора:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{F_m^{(s)}(0)}{s!}t^s = \frac{2}{mt}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{t^{2s+1}}{(2m)^{s+1}(2s+1)!}$$
$$\sum_{k=1}^{m}(2m-2k+1)^{2s+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{F_m^{(s)}(0)}{(2m)^s s!}t^s. \tag{7}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t і беручи $l = n-k+1$, дістанемо рівність (3), що й потребувалось довести.

У якості доповнення до формули (3) наведемо також наступний результат:

$$\nu_{2n-1}^{(m)} = \frac{1}{n(2m)^{2n+1}}\sum_{l=0}^{n}\binom{2n}{2l}\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^{2l}\mu_{2n-2l}^{(m)}\,, \tag{8}$$

де $\nu_n^{(m)} = \int_{0}^{1} x^n UP_m(x)dx\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

При цьому очевидно, що $\nu_{2n}^{(m)} = \frac{1}{2}\mu_{2n}^{(m)}$.

2. Тепер визначимо значення функцій $UP_m(x)$ у точках $x_{m,n,s} = -1 + \frac{s}{m(2m)^n}$, $s = 0, 1, \ldots, (2m)^{n+1}$.

Зазначимо, що точки $x_{m,n,s}$ становлять всюди щільну множину на відрізку $[-1, 1]$.

Теорема. Справедливі формули:

$$UP_m\left(x_{m,n,s}\right) = \frac{2^{n+1}}{n!(2m)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}} \sum_{j=1}^{s} \delta_j^{(m)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2s-2j+1)^{n-2k} \mu_{2k}^{(m)}, \tag{9}$$

де $[a]$ – ціла частина числа a; $\delta_j^{(m)}$ – символ Кронекера.

Доведення.

Скористаємось отриманою в [1] формулою:

$$UP_m^{(l)}(x) = B_l^{(m)} \sum_{k=1}^{(2m)^l} \delta_k^{(m)} UP_m\left((2m)^l x + (2m)^l - 2k + 1\right), \tag{10}$$

де B_l – B-сплайн Шенберга; $\delta_k^{(m)} = (-1)^{\sum_i p_i}$; p_i – i-й знак у $2m$-ічному представленні числа $\frac{k}{m} - 1$, якщо m ділить k, і числа $[k/m]$, якщо m не ділить k.

$$UP_m(x_{m,n,s}) = \frac{1}{m!} \int_{-1}^{x_{m,n,s}} UP_m^{(n+1)}(t)\left(x_{m,n,s} - t\right)^n dt =$$
$$= \frac{2^{n+1}(2m)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!} \sum_{j=1}^{s} \delta_j^{(m)} \int_{-1}^{x_{m,n,s}} \left(x_{m,n,s} - t\right)^n \times \tag{11}$$
$$\times UP_m\left((2m)^{n+1} t + (2m)^{n+1} - 2j + 1\right) dt.$$

Після заміни $z = (2m)^{n+1} t + (2m)^{n+1} - 2j + 1$ отримаємо:

$$UP_m\left(x_{m,n,s}\right) = \frac{2^{n+1}}{n!(2m)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}} \sum_{j=1}^{s} \delta_j^{(m)} \int_{-1}^{1} UP_m(z)(2s-2j-z+1)^n dz =$$
$$= \frac{2^{n+1}}{n!(2m)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}} \sum_{j=1}^{s} \delta_j^{(m)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2s-2j+1)^{n-2k} \mu_{2k}^{(m)}, \tag{12}$$

що й потрібно.

При $s = 1$ формула (9) набуває вигляду:

$$UP_m\left(x_{m,n,1}\right) = \frac{2^n}{(n-1)!(2m)^{\frac{n(n+1)}{2}}} \nu_{n-1}^{(m)}. \tag{13}$$

Аналогічні формули отримані і для значень похідних функції $UP_m(x)$.

Висновок

Атомарні функції є зручний і перспективний апарат для розв'язання різноманітних крайових задач. В даній статті наведені формули для обчислення моментів і значень важливого класу атомарних функцій.

Список літератури

1. *Рвачев В.А. Некоторые атомарные функции и их применение / В.А. Рвачев, Г.А. Старец // Докл. АН УССР, сер. А .– 1983. – № 11. – С. 6-8.*
2. *Рвачев В.А. Финитные решения дифференциально-функциональных уравнений и их применение / В.А. Рвачев // Успехи математических наук. – М., 1990. – Т. 45, вып. I(271). – С. 77-103.*
3. *Старец Г.А. Один класс атомарных функций и его применение: дисс. канд. физ.-мат. наук; 01.01.01 / Георгий Александрович Старец. – Х., 1984. – 104 с.*

Надійшла до редколегії 5.10.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.А. Калкаманов Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

О МОМЕНТАХ И ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Г.А. Старец, Л.И. Курпа

Атомарные функции – это финитные бесконечно дифференцированные решения некоторых дифференциальных уравнений с отклонением аргумента. В частности, атомарные функции $UP_m(x)$ достаточно удобный и перспективный современный аппарат для применения в разнообразных областях науки и техники. Так, например, использование функций $UP_m(x)$ является эффективным при решении краевых задач. Заметим, что первое систематическое исследование атомарных функций было осуществлено И.О. Рвачевым.

Ключевые слова: *атомарные функции, финитные решения, уравнения с отклонением аргумента.*

ABOUT MOMENTS AND VALUES OF SOME ATOMIC FUNCTIONS

G.A. Starets, L.I. Kurpa

Atomic functions – it finitary the infinitely differentiated upshots of some differential equalizations with the rejection of argument. In particular atomic functions $UP_m(x)$ all the same enough comfortable and perspective modern vehicle in relation to application in the various areas of science and technique. So, for example, the use of functions is effective at the decision of regional tasks. We will notice that the first systematic research of atomic functions was carried out I.O. Rvachev.

Keywords: *atomic functions, finitary upshot of differential equalizations, equalization with the rejection of argument.*