УДК 519.237

В.В. Карпенко, Ямен Хазим

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

ДЕКОМПОЗИЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ АНАЛИЗА СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Для решения задач исследования систем с большим числом состояний предложен декомпозиционный подход. Описан метод, позволяющий рассчитать рациональное число групп состояний. Рассмотрен частный случай анализа системы с двумерным множеством возможных состояний. Обоснована рациональная стратегия декомпозиции сложной системы, функционирование которой описывается двумерным полнодоступным марковским графом.

Ключевые слова: *система с большим числом состояний, декомпозиция, расчет рационального числа групп, вычислительная процедура, оценка эффективности процедуры декомпозиции.*

Введение

Традиционные трудности, возникающие при анализе распределённых систем, связаны с большим числом возможных их состояний. При этом даже при использовании наиболее эффективных моделей функционирования таких систем соответствующие вычислительные процедуры остаются чрезмерно трудоемкими. Естественный общий подход к решению задач высокой размерности – декомпозиция, реализуемая путем фазового укрупнения состояний [1 – 4] следующим образом. Исходная задача редуцируется к совокупности локальных задач меньшей размерности. Локальные задачи решаются независимо, а затем их результаты объединяются решением координирующей задачи. Редукция реализуется кластеризацией всего множества возможных состояний. При этом принципиальным является вопрос о том, на сколько групп (кластеров) следует разбивать исходное множество состояний.

Цель исследования – разработка метода расчета рационального числа кластеров, обеспечивающего минимизацию суммарного времени решения задачи. Сформируем соответствующую задачу.

Постановка задачи. Пусть анализируемая система может находиться в одном из N возможных состояний. Если это множество разбить на m подмножеств с равным числом состояний, то каждое из этих подмножеств будет иметь $k = N/m$ состояний. Введем функцию $\varphi(k)$, определяющую среднюю трудоемкость решения задачи анализа системы, содержащей k возможных состояний. Тогда можно рассчитать среднюю суммарную трудоемкость анализа исходной системы по формуле

$$F(N,m) = m\,\varphi\left(N/m\right) + \varphi\left(m\right). \qquad (1)$$

Первое слагаемое критерия (1) определяет трудоемкость решения m локальных задач, а второе – трудоемкость координирующей задачи.

Задача состоит в отыскании параметра m, минимизирующего критерий (1).

Основной результат

Определение стратегии кластеризации. Для аналитического описания функции $\varphi(k)$? используем соотношение

$$\varphi(k) = a\,k^p, \quad p > 1,$$

описывающее вычислительную сложность решения системы линейных алгебраических уравнений с k неизвестными [5, 6]. Тогда формула (1) примет вид

$$F(N,m) = a\,m\left(N/m\right)^p + a\,m^p = aN^p/m^{p-1} + am^p. \qquad (2)$$

Получим искомое значение m. Имеем

$$\frac{dF(N,m)}{dm} = (1-p)a\,N^p m^{-p} + pam^{p-1} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{p-1}{p}N^p = m^{2p-1}, \quad m = E\left[\left(N^p\cdot(p-1)/p\right)^{1/(2p-1)}\right].$$

В полученном выражении $E[\bullet]$ – выделение целой части. Если, в частности. $p = 3$, то

$$m = E\left[\left(2/3\right)^{1/5} N^{3/5}\right]. \qquad (3)$$

Используя (3), легко подсчитать выигрыш, получаемый при использовании декомпозиции. Так как

$$F(N,m) = a\cdot\left(2/3\right)^{1/5} N^{3/5}\left[N/\left(\left(2/3\right)^{1/5} N^{3/5}\right)\right]^3 +$$
$$+ a\cdot\left[\left(2/3\right)^{1/5} N^{3/5}\right]^3 = a\cdot\left[\left(2/3\right)^{-2/5} N^{9/5} + \right. \qquad (4)$$
$$\left. +\left(2/3\right)^{3/5} N^{9/5}\right] \cong 2a\cdot N^{9/5} \approx 2a\cdot N^2,$$

то $\eta = F(N,1)/F(N,m) = a\cdot N^3/2aN^{9/5} \approx 0,5\cdot N.$

Кроме того, заметим, что для практических целей и удобства решения задачи с использованием кластеризации из (3) можно получить приближенное значение m, равное $N^{1/2}$. При этом все множество состояний разбивается на приблизительно $\sqrt{N}$ кластеров, в каждом из которых содержится приблизительно $\sqrt{N}$ состояний.

Реализуемая с использованием (3) стратегия кластеризации может уточняться в некоторых конкретных частных случаях, когда этого требует структура множества состояний. Пусть, например, анализируется система “торговый зал магазина склад магазина“, в которой расходуемый ресурс торгового зала восстанавливается за счет склада, а ресурс склада пополняется оптовой базой. Функционирование подобных систем при использовании марковских моделей описывается двумерным графом [7, 8], общая структура которого имеет вид, приведенный на рис. 1

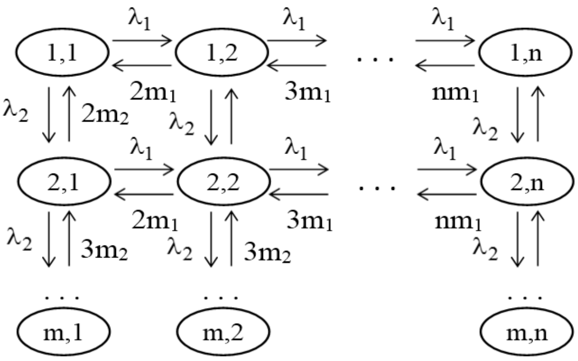

Рис. 1. Граф переходов системы обслуживания

В этой задаче естественное группирование может быть реализовано двумя способами. Первый вариант: объединяются в группы состояния в строках. При этом появляются m групп по n состояний в каждой. Второй вариант: объединяются в группы состояния в столбцах. При этом появляется n групп с m состояниями в каждой. Сравним трудоемкость решения задачи для этих двух вариантов.

Введем следующие обозначения: e_{ij} – j-ое состояние в i-й строке исходного графа переходов, $\hat{E}_i = \{e_{i1},...,e_{in}\}$ – множество состояний в i -й группе, при объединении по строкам, $i = 1, 2,..., m$, $\tilde{E}_j = \{e_{1j},...,e_{mj}\}$ – множество состояний в j-й группе при объединении по столбцам, $j = 1, 2,..., n$. Схематически отобразим эти варианты на рис. 2 и 3.

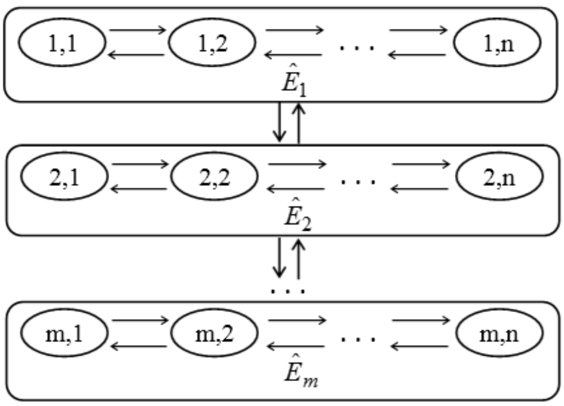

Рис. 2. Граф состояний при объединении по строкам

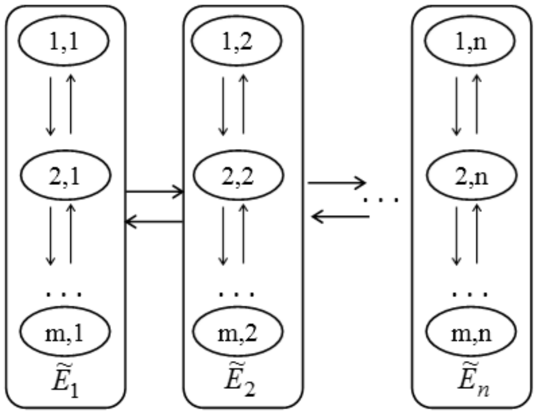

Рис. 3. Граф состояний при объединении по столбцам

В соответствии с этими схемами в первом варианте решается m локальных задач размерности n и координирующая задача размерности m. Во втором варианте решается n локальных задач размерности m и локальная задача размерности m.

Тогда трудоемкость первого и второго вариантов решения задачи оценивается соотношениями

$$F_1 = man^3 + am^3, \quad F_2 = nam^3 + an^3.$$

При этом

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= a(mn^3 + m^3 - nm^3 - n^3) = \\ &= a[mn(n^2 - m^2) - (n^3 - m^3)] = \qquad (5) \\ &= a(n-m)[mn(n+m) - (n^2 + mn + m^2)] = \\ &= a(n-m)[mn(n+m) - (n^2 + 2mn + m^2 - mn)] = \\ &= a(n-m)[mn(n+m) - (n+m)^2 + mn] = \\ &= a(n-m)[(n+m)(mn - (n+m))] + a(n-m)mn. \end{aligned}$$

Если $m \ge 2, n \ge 2$, то $1/m + 1/n \le 1$, отсюда $mn \ge m + n$. Пусть, например, $n > m$. Тогда, с учетом (5), получим $F_1 > F_2$.

Таким образом, в этом случае второй вариант эффективнее первого, то есть для фиксированного значения mn выгоднее решать большее число (n) задач с меньшей размерностью (m), чем меньшее число (m) задач с большей размерностью (n).

Выводы

Таким образом, предложен метод решения задач исследования систем с большим числом возможных состояний, основанный на декомпозиции. При этом решение исходной задачи сводится к последовательному независимому решению набора задач меньшей размерности с последующим объединением полученных результатов. Показано, что этот подход позволяет существенно снизить (в число раз приблизительно равное числу состояний системы) вычислительную трудоемкость исходной задачи высокой размерности.

Список литературы

1. Королюк В.С.Фазовое укрупнение сложных систем. / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1976. – 293 с.

2. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1979. – 293 с.

3. Раскин Л.Г. Анализ марковских цепей с использованием фазового укрупнения состояний / Л.Г. Раскин // Инф. технологии: Наука, техника, технология, образование, здоровье. – Х.: НТУ «ХПИ», 1997. – С. 280-284.

4. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наукова думка, 1986. – 584 с.

5. Поспелов Д.А. Введение в теорию вычислительных систем / Д.А. Поспелов. – М.: Наука, 1972. – 300 с.

6. Раскин Л.Г. Математическое моделирование функционирования сложных систем / Л.Г. Раскин. – Х.: ВИРТА ПВО, 1988. – 177 с.

7. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределённости / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко, 2010. – 512 с.

8. Серая О.В. Оценка эффективности марковских систем, функционирующих в марковской меняющейся среде / О.В. Серая. – Минск: Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, 2010. – 1(25). – С. 75-81.

Поступила в редколлегию 26.02.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

ДЕКОМПОЗІЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ АНАЛІЗУ СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ СТАНІВ

В.В. Карпенко, Ямен Хазім

Для рішення задач дослідження систем з великою кількістю станів запропонований декомпозіційний підхід. Описано метод, що дозволяє обчислити раціональне число груп станів. Розглянуто окремий випадок аналізу системи з двомірною множиною можливих станів. Обґрунтована раціональна стратегія декомпозиції складної системи, функціонування якої описується двомірним повнодоступним марковським графом.

Ключові слова: *система з великим числом станів, декомпозиція, розрахунок оптимальної кількості груп, обчислювальна процедура, оцінка ефективності процедури декомпозиції.*

DECOMPOSITION TECHNOLOGY SYSTEMS ANALYSIS WITH THE LARGE NUMBER OF STATES

V.V. Karpenko, Yamen Hazim

In order to solve research problems of systems with a large number of states proposed decomposition approach. The method, which allows calculating the rational state groups. Consider the particular case of systems with two-dimensional analysis of the set of possible states. Substantiates the rational strategy of decomposition of a complex system, the functioning of which is described by the two-dimensional fully accessible Markov graph.

Keywords: *system with a large number of states, decomposition, rational calculation of the number of groups, the computational procedure, evaluation of the effectiveness of decomposition procedures.*