УДК 621.3

М.І. Литвиненко, Ю.С. Долгий, С.І. Хмелевський, О.В. Петров, Ю.В. Данюк

Харківский университет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ ПО КАНАЛУ ВИПАДКОВОГО ДОСТУПУ

Розглядається математична модель, яка складається з системи рівнянь, які описують різноманітні стани системи та закони розподілу часу обслуговування пакетів, що дозволяє дослідити основні ймовірнісно-часові характеристики та проаналізувати роботу окремого пристрою системи.

Ключові слова: *стохастичність, мережа, пакет, комутатор, буфер, чисельні методи, граф станів, система рівнянь, передача даних, ймовірність.*

Вступ

Мережева інформаційна інфраструктура до недавнього часу будувалася в основному на базі закритих протоколів, які впроваджувалися розробником виходячи з міркувань вирішення певного класу задач. Однак, випадковий метод доступу до середовища передачі даних, на якому ґрунтується Ethernet, вносить стохастичність часу передачі даних. При реалізації необхідно враховувати не тільки невизначеність часу доставки даних (пакетів, заяв, повідомлень), але і можливість втрати інформації [1 – 5]. Ці проблеми можна вирішувати при проектуванні мережі, вибираючи конфігурацію з необхідними параметрами часу доставки і розмірів пакетів. При цьому математичне моделювання передбачає послідовне проведення аналізу самого об'єкта моделювання, синтезу математичної моделі та її аналізу з метою перевірки адекватності та оцінки допустимої точності результатів.

Мета статті – полягає в розробці математичної моделі функціонування мережі передачі даних з конкуруючим доступом на основі комутуючого пристрою з кінцевим розміром буфера.

Основна частина

Для моделювання часу доставки з урахуванням черг пакетів розглянемо мережу, яка представлена на рис. 1.

Припустимо: є п - джерел пакетів;

- в кожному джерелі пакети формуються з інтенсивністю λ;
- комутатор має буфер на N пакетів;
- обробка пакетів здійснюється з інтенсивністю μ.

Коли черга досягає рівня N, то знову сформований пакет залишається у джерелі до тих пір, поки не з'явитися можливість відправити його в буфер комутатора, при цьому наступний пакет в даному джерелі не формується. Якщо в розглянутій системі є декілька джерел які мають сформовані пакети, то звільняється місце в буфері комутатора, і вони займають на конкурентній основі з однаковою ймовірністю.

З урахуванням прийнятих припущень для визначення закону розподілу часу обслуговування пакетів від джерел, сформуємо вектор, що характеризує стан системи: (j,i), де

j - кількість пакетів у черзі комутатора, j=0..N;

i - кількість джерел, що мають пакети, i=0..n.

На рис/ 2 представлений граф Марківського процесу загибелі і розмноження з безперервним часом. Математичний опис Марківських процесів зазвичай представляється у вигляді систем диференціальних (у випадку нестаціонарного режиму) або алгебраїчних (для стаціонарного режиму) рівнянь, рішення яких, в загальному випадку, одержати в явному вигляді не вдається.

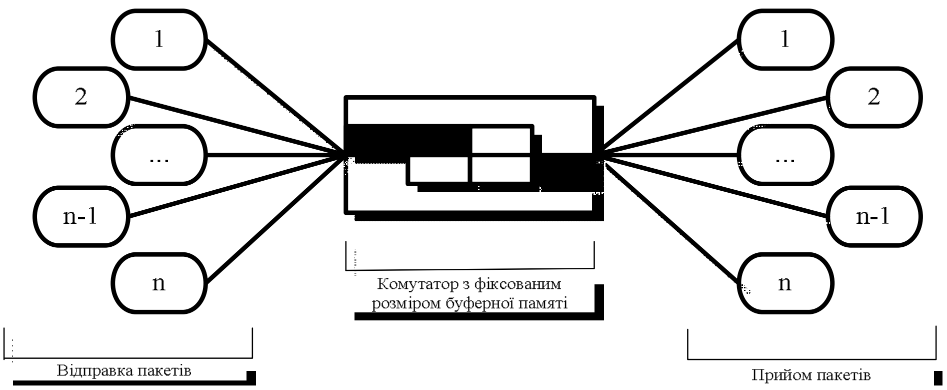

Рис. 1. Схема розглянутої мережі

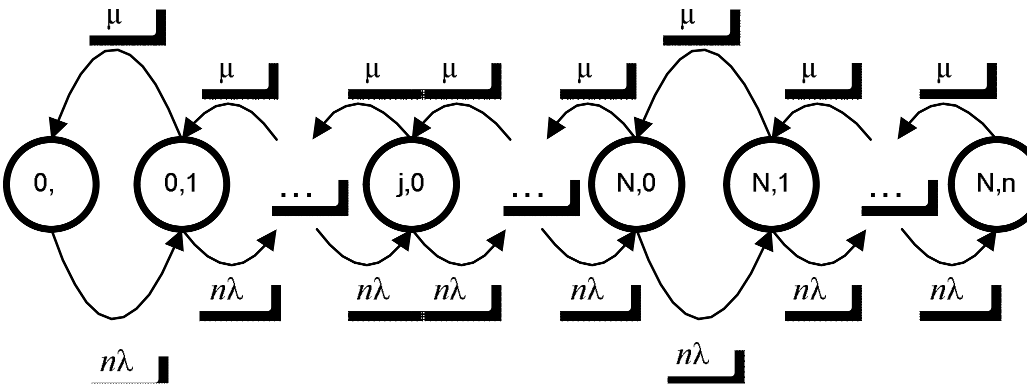

Рис. 2. Граф стану системи

Це обумовлює необхідність застосування чисельних методів розв'язання систем диференціальних або алгебраїчних рівнянь. Складемо для графа на рис. 2 систему рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{0,0}(t)}{dt} = -n\lambda P_{0,0}(t) + \mu P_{1,0}(t); \\ \dfrac{dP_{1,0}(t)}{dt} = -(n\lambda + \mu)P_{1,0}(t) + n\lambda P_{0,0}(t) + \\ \qquad + \ \mu P_{2,0}(t); \\ \dfrac{dP_{j,0}(t)}{dt} = -(n\lambda + \mu)P_{j,0}(t) + n\lambda P_{j-1,0}(t) + \\ \qquad + \mu P_{j+1,0}(t); \\ \dfrac{dP_{N,0}(t)}{dt} = -(n\lambda + \mu)P_{N,0}(t) + n\lambda P_{N-1,0}(t) + \\ \qquad + \mu P_{N,1}(t); \\ \dfrac{dP_{N,1}(t)}{dt} = -((n-1)\lambda + \mu)P_{N,1}(t) + \\ \qquad + n\lambda P_{N,0}(t) + \mu P_{N,2}(t); \\ \dfrac{dP_{N,i}(t)}{dt} = -((n-i)\lambda - \mu)P_{N,1}(t) + \\ \qquad + (n-i+1)\lambda P_{N,0}(t) + \mu P_{N,i+1}(t); \\ \dfrac{dP_{N,n}(t)}{dt} = -\mu P_{N,1}(t) + \lambda P_{N,n-1}(t). \end{cases} \tag{1}$$

Вирішуючи цю систему рівнянь, задаємо початкові умови:

$$P_{0,0}(0) = 1;\ P_{j,0}(t) = 0;$$
$$P_{N,i}(0) = 0,\ i = 1..n,\ j = 1..N.$$

Можна обчислити ймовірності через $P_{N,n}$. Розглянемо стаціонарні ймовірності стану системи.

$$P_{N,n-1} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)P_{N,n}. \tag{2}$$

Тоді

$$P_{N,n-2} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{1}{2}P_{N,n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 P_{N,n}; \tag{3}$$

$$P_{N,n-3} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{1}{3}P_{N,n-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 P_{N,n}; \tag{4}$$

Таким чином:

$$P_{N,n-i} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i \frac{1}{i!}P_{N,n} \ \text{ і } P_{N,1} = = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-i}\frac{1}{(n-1)!}P_{N,n}. \tag{5}$$

$$P_{N,n} = (n-1)!\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^{N+1} = = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^{N+n}P_{0,0}. \tag{6}$$

Введемо умови $P = \frac{n\lambda}{\mu};\ \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho}{n}$, тоді

$$P_{N,n} = \frac{(n-1)}{n^{n-1}}\rho^{N+n}P_{0,0}, \tag{7}$$

$P_{0,0}$ знайдемо з умови нормування $\sum_{i,j} P_{i,j} = 1$,

$$P_{0,0}\left(1 + \rho + \cdots + \rho^N\right) + P_{N,n} \times$$
$$\times\left(\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + 1\right) = 1.$$

$$1 + \rho + \cdots + \rho^N = \frac{1 - P^{N+1}}{1 - P},$$

$$1 + \left(\frac{n}{\rho}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{n}{\rho}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{n}{\rho}\right)^{n-1} = A,$$

де $A = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{n}{\rho}\right)^i$.

В результаті отримаємо

$$P_{0,0} = \frac{1}{\left(\dfrac{1 - P^{N+1}}{1-\rho}\right) + \dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}\rho^{N+n}A}. \tag{8}$$

Бажаний закон розподілу часу обслуговування пакету можна представити таким чином:

$$f(t) = f_{1,0}(t) + f_{2,0}(t) + \cdots + f_{N,0}(t) + \\ f_{N,1}(t) + +f_{N,2}(t) + \cdots + f_{N,n}(t), \qquad (9)$$

де $f_{N,i}(t)$ – закон розподілу часу обслуговування пакету, якщо в системі (i-1) джерел мають пакети, а буфер повний; $f_{j,0}(t)$ – закон розподілу часу обслуговування пакету, якщо він займе j-ту чергу в буфері; причому

$$f_{j,0}(t) = \tilde{P}_{j-1,0}\tilde{f}_j(t). \qquad (10)$$

де $\tilde{P}_{j-1,0}$ – імовірність того, що в момент приходу пакету в систему перебував (j-l) пакет, таким чином, пакет що прийшов займає j-е місце в черзі комутатора. $\tilde{f}_j(t)$ – умовний закон розподілу часу обслуговування пакету розташованому на j-му місці в буфері.

Так як закон обслуговування комутатора має експоненціальний характер, то

$$\tilde{f}_j(t) = \frac{\mu(\mu t)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\mu t}, \qquad (11)$$

тобто обслуговування буде відбуватися за законом Ерланга j-го порядку.

Для визначення законів розподілу $f_{N,i}(t)$ діємо наступним чином.

Виділимо з n джерел один і визначимо для нього час обслуговування пакету.

Для цього введемо вектор (N, I, k), де:

N на першій позиції показує, що буфер зайнятий;

I – кількість джерел, що мають пакети, крім обраного, (1 < n – 1);

k – ознака наявності або відсутності пакету у виділеному пристрої, к=0, або к=1.

Розглянемо частину графа, представленого на рис. 2, починаючи з (N,0,0), і побудуємо новий граф з урахуванням введення нового вектору стану.

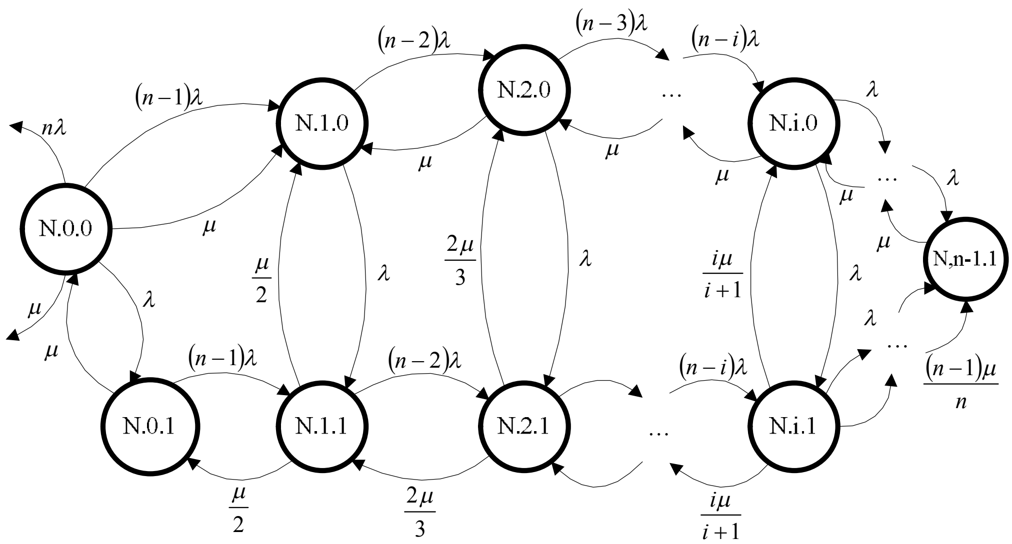

Рис. 3. Граф станів з вибраним пристроєм

Для графа на рис. 3 можна скласти систему рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{N,0,0}(t)}{dt} = -(n\lambda + \mu)P_{N,0,0}(t) + n\lambda P_{N-1,0,0}(t) + \mu P_{N,1,0}(t) + \mu P_{N,0,1}(t); \\ \dfrac{dP_{N,1,0}(t)}{dt} = -((n-1)\lambda + \mu)P_{N,1,0}(t) + (n-1)\lambda P_{N,0,0}(t) + \mu P_{N,2,0}(t) + \dfrac{\mu}{2}P_{N,1,1}(t); \\ \dfrac{dP_{N,i,0}(t)}{dt} = -((n-1)\lambda + \mu)P_{N,i,0}(t) + (n-1)\lambda P_{N,i-1,0}(t) + \mu P_{N,i+1,0}(t) + \mu P_{N,i,1}(t); \\ \dfrac{dP_{N,0,1}(t)}{dt} = -((n-1)\lambda + \mu)P_{N,0,1}(t) + \lambda P_{N-1,0,0}(t) + \dfrac{\mu}{2}P_{N,1,0}(t); \\ \dfrac{dP_{N,1,1}(t)}{dt} = -((n-2)\lambda + \mu)P_{N,1,1}(t) + (n-1)\lambda P_{N,0,1}(t) + \dfrac{\mu}{2}P_{N,1,0} + \dfrac{2}{3}\mu P_{N,2,1}(t); \\ \dfrac{dP_{N,n-1,1}(t)}{dt} = -((n-i+1)\lambda + \mu)P_{N,1,1}(t) + (n-i)\lambda P_{N,i-1,1}(t) + \dfrac{\mu}{i+1}P_{N,i,0}(t) + \dfrac{i}{i+2}\mu P_{N,i+1,1}(t); \\ \dfrac{dP_{N,n-1,1}(t)}{dt} = -\mu P_{N,n-1,1}(t) + \lambda P_{N,n-2,1}(t) + \lambda P_{N,n-2,1}(t). \end{cases} \qquad (12)$$

Таким чином, маємо

$$P_{N,j} = P_{N,i-1,0} + P_{N,i,0}. \quad (13)$$

Всі джерела, які були розглянуті в системі, мають однакові характеристики, а для стаціонарних ймовірностей при таких початкових умовах

$$P_{N,i,k}(t) = 0,\ i = 1..n$$

отримаємо:

$$P_{N,0,0}(0) = 1;\ P_{N,1,0}(t) = 0;$$

$$P_{N,i-1,1} = \frac{i}{n} P_{N,i}; \quad (14)$$

$$P_{N,i,0} = \frac{n-i}{n} P_{N,i}; \quad (15)$$

$$P_{N,0,0} = P_{N,0}. \quad (16)$$

Закон розподілу $f_{N,i}(t)$ може мати вигляд:

$$f_{N,i}(t) = P_{N,i-1,0} \cdot f_{N,i}(t), \quad (17)$$

де $\tilde{P}_{N,i-1,0}$ – ймовірність того, що в момент надходження пакета від виділеного пристрою в системі вже (i-1) пристроїв мають пакети; $\tilde{f}_{N,i}(t)$ – умовний закон розподілу часу обслуговування пакетів? які прийшли i-ми в систему, коли буфер був зайнятий.

Для знаходження даного закону побудуємо новий граф стану, де (N,0,0), (N,1,0)... (N,n-1,0) будуть поглинаючими (кінцевими) станами (рис. 4).

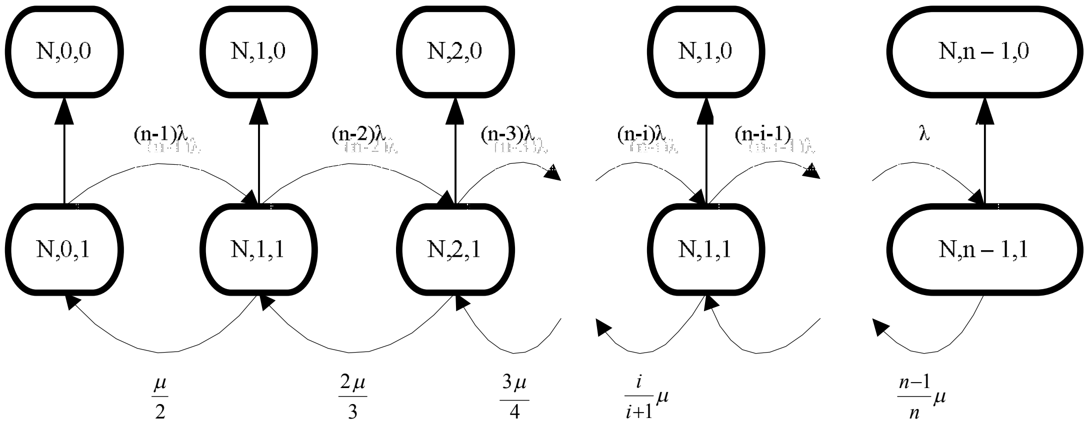

Рис. 4. Граф станів з виділеними поглинаючими станами

Для графа на рис. 4 складемо систему рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{P}_{N,0,1}(t)}{dt} = -\left((n-1)\lambda + \mu\right)\tilde{P}_{N,0,1}(t) + \mu\tilde{P}_{N,1,1}(t); \\ \dfrac{d\tilde{P}_{N,1,1}(t)}{dt} = -\left((n-2)\lambda + \mu\right)\tilde{P}_{N,1,1}(t) + \left((n-1)\lambda + \mu\right)\tilde{P}_{N,0,1}(t) + \dfrac{2}{3}\mu\tilde{P}_{N,2,1}(t); \\ \dfrac{d\tilde{P}_{N,i,1}(t)}{dt} = -\left((n-i-1)\lambda + \mu\right)\tilde{P}_{N,i,1}(t) + \left((n-i)\lambda + \mu\right)\tilde{P}_{N,i-1,1}(t) + \dfrac{i+1}{i+2}\mu\tilde{P}_{N,i+1,1}(t); \\ \dfrac{d\tilde{P}_{N,n-1,1}(t)}{dt} = -\mu\tilde{P}_{N,n-1,1}(t) + \lambda\tilde{P}_{N,1,1}(t). \end{cases} \quad (18)$$

Отриману систему рівнянь необхідно вирішувати при відповідних початкових умовах.

Якщо скористатися початковою умовою

$$\tilde{P}_{N,0,1=1;}\ \tilde{P}_{N,i,1=0;}\ i \neq 0,$$

то рішення системи (12) буде відповідати випадку, коли заявка, що прийшла в систему, виявляє буфер зайнятим і виявляється єдиною і очікує своєї черги.

Закон розподілу в цьому випадку буде мати такий вигляд:

$$\tilde{\tilde{f}}_{N,1} = \mu \cdot \tilde{\tilde{P}}_{N,0,1}(t) + \frac{1}{2}\mu;$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{N,1,1}(t) + \cdots + \frac{1}{n}\mu \cdot \tilde{\tilde{P}}_{N,n-1,1}(t). \quad (19)$$

Якщо скористатися іншою початковою умовою $\tilde{P}_{N,k,1=1;}\ \tilde{P}_{N,i,1=0;}\ i \neq 0,\ i \neq k,$ то рішення системи (18) буде відповідати випадку, коли заявка надійшла k-ою в систему при зайнятому буферу. У цьому випадку закон розподілу буде визначати також вираз (19), але вже з новим вирішенням системи (18), відповідно з новими початковими умовами.

Необхідно зазначити, що закон розподілу $\tilde{\tilde{f}}_{N,i}$, одержаний у цьому випадку, характеризує час очікування заявки від моменту надходження в систему, до моменту потрапляння в буфер комутатора на N-те місце.

Таким чином, закон розподілу часу від моменту потрапляння в систему, до моменту виходу з неї, тобто до закінчення обслуговування, визначається композицією двох законів розподілу, отриманого з виразу.

$$\tilde{f}_{N,i} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{f}}_{N,i} \cdot f_{N(t-\tau)d\tau},$$

де

$$f_N(t) = \frac{\mu(\mu t)^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\mu t}. \qquad (20)$$

Для визначення закону розподілу $f(t)$ необхідно знайти ймовірності $\tilde{P}_{j,0}$ і $\tilde{P}_{N,i,1}$ які беруть участь у виразах (10) і (13) відповідно. Виразимо ці ймовірності через відповідні стаціонарні ймовірності станів графа на рис. 2, використаємо формулу Байєса. Позначимо

$$\sum_{j=0}^{N} P_{j,0} + \sum_{i=1}^{n-1} P_{N,i,0} = P,$$

тоді

$$P_{j,0} = \frac{P_{j,0}}{P}, \ j = \overline{0, N}$$

та

$$\tilde{P}_{N,i,0} = \frac{P_{N,i,0}}{P} = \frac{n-i}{n} \cdot \frac{P_{N,i}}{P}, \ i = \overline{1, n-1}, \qquad (21)$$

$$\tilde{P}_{N,0,0} = \tilde{P}_{N,0} = \frac{P_{N,0}}{P}.$$

Таким чином, шуканий закон розподілу можна представити у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{P}\left[\sum_{j=1}^{N} P_{j-1,0} \cdot \frac{\mu(\mu t)^{j-1}}{(j-1)!} \cdot e^{-\mu t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-1}{n} \cdot P_{N,i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{f}}_{N,i+1(t)} \cdot f_N(t-\tau) d\tau \right],$$

де $P_{j-1,0}$ – це ймовірність того, що в черзі, є j-та заявка, і не одне джерело не формує заявок, N - розмір черги комутатора, $P_{N,i}$ – ймовірність того, що буфер заповнений та і джерел у системі формують заявки, $\tilde{\tilde{f}}_{N,i}(t)$ – закон розподілу, що характеризує час очікування заявки від моменту надходження в систему, до моменту потрапляння в буфер комутатора на N-е місце, $f_{N(t-\tau)}$ – закон Ерланга N-го порядку.

Висновки

Таким чином, запропонована математична модель, яка складається з систем рівнянь, що описують різні стани системи та законів розподілу часу обслуговування пакетів, що дозволяє дослідити основні ймовірнісно-часові характеристики та проаналізувати роботу окремого пристрою системи та його взаємодію з іншими пристроями мережі на основі щільності розподілу ймовірності часу обслуговування пакету.

Отримані щільності розподілу часу доставки пакетів для різних режимів роботи системи можна апроксимувати відповідним аналітичним законом розподілу.

Список літератури

1. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем / Т.И. Алиев. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.

2. Башарин Г.П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета / Г.П. Бочаров, Я.А Коган. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

3. Олифер В.Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы. Учебник для вузов. 4-ое изд. / В.Г. Олифер, Н А. Олифер. – СПб.: Питер, 2010. – 944 с.

4. Берж К. Теория графов и ее применения [Текст] / К. Берж. – М.: Иностранной литературы, 2002. – 320 с.

5. Столлингс В. Современные компьютерные сети, 2-е изд. ed. / В. Столлингс. – Спб.: Питср, 2003. – 783 с.

Надійшла до редколегії 22.04.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Рубан, Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. Харків.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПО КАНАЛУ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

М.И. Литвиненко, Ю.С. Долгий, С.И. Хмелевський, Ю.В. Данюк, А.В. Петров

Рассматривается математическая модель, которая состоит из системы уравнений, описывающие различные состояния системы и законы распределения времени обслуживания пакетов, что позволяет исследовать основные вероятноспно-временные характеристики и проанализировать работу отдельного устройства системы.

Ключевые слова: *стохастичности, сеть, пакет, коммутатор, буфер, численные методы, граф состояний, система уравнений, передача данных, вероятность.*

SIMULATION OF DATA TRANSMISSION ON THE RANDOM ACCESS CHANNEL

M.I. Litvinenko, Yu.S. Dolgiy, S.I. Hmelevskij, Yu.V. Daniuk, A.V. Petrov

A mathematical model, which consists of a system of equations describing the different States of the system and the laws of distribution of service time of packets, which enables IP-to follow basic time characteristics and to analyze the performance of individual devices in the system.

Keywords: *stochasticity, network, packet switch, the buffer, numerical methods, graph of, C-systems of equations, data, probability.*