УДК 621.37:621.391

С.Г. Рассомахин, С.Г. Веклич

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СЛОЖНЫХ СИГНАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Предложен способ алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций, с помощью которого можно осуществлять определение информативных параметров комбинированных сигналов на основе решения специально составленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Ключевые слова: *быстрое преобразование Фурье, система линейных уравнений, цифровая обработка сигналов, сигнальные конструкции, OFDM сигналы, радиомониторинг.*

Введение

В современных условиях, характеризуемых сложностью задач, решаемых радиосистемами, и разнообразием помеховой обстановки, разработка достаточно совершенных систем возможна лишь на базе современных методов оптимизации. Общую проблему синтеза радиотехнических систем условно можно подразделить на две частные задачи: выбор «наилучших» сигналов для достижения требуемого результата с учетом реальной обстановки и оптимальная обработка принимаемых сигналов.

Главная задача приема сигналов сводится к наилучшему восстановлению полезной информации по сигналу, искаженному при распространении и принимаемому совместно с помехами, имеющими естественный или преднамеренный характер. Искажения сигнала и наличие помех уменьшают вероятность правильного приема переданного информационного сообщения, нарушая его целостность и способствуя реализации угроз информационной безопасности [1].

Построение эффективных систем передачи информации (СПИ) в настоящее время неразрывно связано с проблемой повышения использования временного и частотно-энергетического ресурса физических каналов связи. Одним из наиболее распространенных примеров такого решения проблемы является применение сигналов с фазо-частотной модуляцией, использующих наборы гармонических колебаний (поднесущих частот), каждое из которых модулировано по фазе. Обеспечение ортогональности поднесущих частот привело к интенсивному использованию одного из наиболее перспективных видов сигналов – OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Сложность структуры таких сигналов является причиной существенных затруднений при решении задач демодуляции и радиомониторинга. Поэтому совершенствование методов автоматического цифрового анализа многочастотных многофазных сигналов является весьма актуальной задачей.

Анализ литературы. Традиционным методом первичного выявления параметров и демодуляции контролируемых сигналов в настоящее время является их анализ на основе алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Использование алгоритмов БПФ для обработки OFDM сигнала предполагает наличие точной информации на приемной стороне о ряде параметров сигнала. При решении задач радиомониторинга и демодуляции эти данные, как правило, неизвестны.

Аппарат БПФ, оптимизированный по вычислительным затратам на основе алгоритмов прореживания по частоте или времени, не всегда является предпочтительным с точки зрения избыточной размерности задачи. К примеру, если спектр сигнала на интервале дискретности канала состоит из малого числа квадратурных частотных компонент $f_1, f_2, \ldots, f_m >> 0$, то для его полной обработки достаточно вычислить только m амплитудных коэффициентов. Если использовать БПФ, то на основании свойств вычислительного алгоритма определение осуществится для $2 \cdot T \cdot f_m >> m$ амплитуд, т.е. решится чрезмерно избыточная задача [2].

В связи с этим, развитие программно-аппаратных средств цифровой обработки сигналов, ориентированных только на использование алгоритмов БПФ не всегда является оправданным. Представляет интерес разработка теоретических и практических основ применения обычного аппарата линейной алгебры для оптимизации вычислительных затрат и повышения характеристик точности распознавания и демодуляции сложных сигналов.

Основная часть

1. Математическая модель представления и обработки OFDM структур

Пусть OFDM сигнал $S_j(t)$ на j интервале модуляции длительностью T_p формируется путем суммирования нескольких гармонических колебаний одинаковой амплитуды, каждое из которых имеет

m вариантов модуляционного фазового сдвига. Величина m определяет кратность использованной фазовой (ФМ) или относительно-фазовой манипуляции (ОФМ) и соответствует основанию кода источника. При использовании ФМ и единичном значении амплитуды поднесущих колебаний математическую модель сигнала можно представить в следующем виде:

$$S_j(t) = \sum_{j=0}^{NF-1} \sin\left[2\pi\left(f_0 + \frac{j}{T}\right)\left(t - T_p\left\lfloor\frac{t}{T_p}\right\rfloor\right) + \varphi_{i,j}\right], \quad (1)$$

где t – текущее время; f_0 – низшая поднесущая частота в спектре сигнала; $T = 1/\Delta f$ – величина, обратная минимальному разносу поднесущих частот; NF – число используемых поднесущих; $\varphi_{i,j}$ – значение манипуляционного угла i-го поднесущего колебания на j-м интервале модуляции, которое может принимать одно из m значений; знак $\lfloor\cdot\rfloor$ – означает округление к ближайшему меньшему целому числу.

В ходе дальнейшей обработки сигнала необходимо произвести дискретизацию сигнала по времени и квантование по уровню.

Дискретизация сигнала $S_j(t)$ с заданной частотой дискретизации задается выражением:

$$s_i = S\left(i\frac{1}{Fd}\right), \quad (2)$$

где $i = 0,1,\ldots,N\cdot(Fd/V) - 1$; N – число интервалов модуляции; Fd – частота дискретизации; V – скорость модуляции.

Квантование дискретизированного сигнала s_i моделируется путем умножения фактического измерения сигнала на уменьшенное в 2 раза количество уровней квантования. При этом учитываются только положительные измерения:

$$Sq_i = \left\lceil s_i \cdot 2^{k-1}\right\rceil, \quad (3)$$

где k – разрядность измерения; знак $\lceil\bullet\rceil$ - означает округление к ближайшему целому числу.

При демодуляции цифрового сигнала Sq_i необходимо найти значения фазовых углов между отрезками гармонических колебаний на соседних интервалах модуляции.

Стандартным методом демодуляции сигналов является метод быстрого преобразования Фурье, который основан на дискретном преобразовании Фурье, с помощью которого определяется спектр сигнала. В основу БПФ положен принцип разбиения заданной последовательности отсчетов дискретного сигнала на несколько промежуточных последовательностей. Для этого число отсчетов N разделяется на множители. Затем определяются спектры этих промежуточных последовательностей и через них находится спектр всего сигнала. В зависимости от состава, числа и порядка следования указанных множеств существуют различные алгоритмы БПФ [3].

Кроме названных достоинств алгоритма БПФ, существуют и свои недостатки. Главный из них заключается в том, что вычисление коэффициентов ДПФ производится последовательно от нулевого до искомого номера частоты, что приводит к не нужным вычислениям и увеличением длительности работы алгоритма. Для решение этой проблемы алгоритма БПФ предлагается использовать метод линейной алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций.

2. Метод линейной алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций

Применение метода БПФ для вычисления параметров спектра сигналов является вычислительно затратным и сложно реализуемым. Для упрощения вычислений коэффициентов спектра сигналов предлагается использовать метод алгебраической демодуляции сложных сигнальных конструкций. Идея данного метода заключается в статистическом выявлении количества наблюдающихся фиксированных значений фаз гармонических колебаний на поднесущих частотах. Для этого составляется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$A \cdot X = B, \quad (8)$$

где A – матрица амплитуд квадратурных компонент на интервале модуляции; B – вектор значений сигнала в цифровом представлении в каждом отсчете интервала модуляции; X – вектор искомых значений амплитуд для заданного интервала модуляции.

Размерность матрицы A определяется количеством отсчетов N, принимаемых во внимание при анализе сигнала на одном интервале модуляции, и числом квадратур гармоник $(2\cdot n_{f_{max}})$. В зависимости от соотношения вертикального и горизонтального размеров матрицы, система (8) может быть недоопределенной $(N < 2\cdot n_{f_{max}})$, определенной $(N = 2\cdot n_{f_{max}})$ или переопределенной $(N > 2\cdot n_{f_{max}})$. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Наиболее простым является случай, когда система (8) может быть строго определенной $(N = 2\cdot n_{f_{max}})$, поскольку при этом, практически всегда, СЛАУ является совместной и решение системы существует и единственно. Число уравнений равняется числу искомых неизвестных $(2\cdot n_{f_{max}})$, определяющих амплитуды квадратурных компонент сигнала. Для решения СЛАУ на i - м интервале модуляции следует выбрать $(2\cdot n_{f_{max}})$ равномерно расположенных отсчетов массива измерений выборки $P = \{p_0, p_1, \ldots\}$, начиная с позиции начала наблюдения полного тактового интервала сигнала. Квадратная матрица коэффициентов при неизвестных СЛАУ формируется по следующему правилу:

$$A_1 = \left\| a_{i,j} \right\|, \quad i, j = 0, \ldots, \left(2 \cdot n_{f\,max} - 1\right);$$

$$a_{i,j} = \sin\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], \quad 0 \le j \le n_{f\,max} - 1; \qquad (9)$$

$$a_{i,j} = \cos\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], \quad n_f \le j \le 2 \cdot n_{f\,max} - 1;$$

где $q = 0, 1, ..., n_{f_{max}}$.

Вектор свободных членов формируется в виде вектора измерений сигнала на длительности одного интервала модуляции:

$$B_1 = \left\{b_0, b_1, ..., b_{2n_{f_{max}}-1}\right\}, \quad b_i = p_i, \qquad (10)$$

где $i = 0, ..., 2 \cdot n_{f_{max}} - 1$

Решение нормально определенной СЛАУ

$$A_1 \cdot X_1 = B_1 \;\; \Rightarrow \;\; X_1 = A_1^{-1} \cdot B_1 \qquad (11)$$

дает искомою оценку вектора амплитуд квадратурных компонент $X_1 = \left\{x_0^1, \ldots, x^1_{\left(2 \cdot n_{f\,max} - 1\right)}\right\}$, соответствующих допустимым значениям поднесущих частот.

Следующий случай, когда система (8) является недоопределенной ($N < 2 \cdot n_{f_{max}}$), при этом такие системы либо имеют бесконечное число решений, либо не имеют решения вовсе. Недоопределенная СЛАУ может быть решена методом псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза. Согласно методу псевдообратной матрицы, среди множества решений недоопределенной СЛАУ выбирается нормальное решение – решение с минимальной нормой среди решений, удовлетворяющее условию $\left\|X_1\right\| = \min\limits_{X_1}$. Нормальное решение существует и является единственным и находится по формуле:

$$X_1 = A_1^+ \cdot B_1, \qquad (12)$$

где A^+ – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, размерностью $2 \cdot n_{f_{max}} \times 2 \cdot n_{f_{max}}$.

Матрица A^+ определяется соотношением:

$$A_1 \cdot A_1^+ \cdot A_1 = A_1 \qquad (13)$$

Решение (12), которое уместно записать в виде $X_1^+ = A_1^+ \cdot B_1$, дает нулевую невязку $\left\|A_1 \cdot X_1^+ - B_1\right\| = 0$, т.е. решение является псевдорешением и среди всех псевдорешений имеет, как нормальное решение, минимальную норму [4].

Наиболее выгодным с точки зрения максимального учета информации о сигнале является случай решения переопределенной СЛАУ ($N > 2 \cdot n_{f_{max}}$). Для формирования переопределенной СЛАУ используются дополнительные измерения сигнала из выборки P, содержащей большее количество уравнений при том же самом количестве неизвестных. Степень переопределения системы характеризуется коэффициентом $\mu = W/2$ и описывает асимметрию размеров матрицы $W \times 2$. Здесь $W = \lfloor Fd/V \rfloor$, где знак $\lfloor \cdot \rfloor$ – означает округление к ближайшему меньшему целому числу; число 2 означает количество используемых квадратурных компонент, с помощью которых задается сигнал, а, следовательно, количество искомых неизвестных. Матрица A_2 и вектор B_2 формируется, используя максимальное количество измерений на интервале модуляции длительностью T_p, определяемое величиной $Num \approx T_p / t_d$:

$$\begin{aligned} &A_2 = \left\| a_{i,j} \right\|, \\ &i = 0, \ldots, (Num - 1), \;\; j = 0, ..., \left(2 \cdot n_{f\,max} - 1\right); \\ &a_{i,j} = \sin\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], \;\; 0 \le j \le n_{f\,max} - 1; \\ &a_{i,j} = \cos\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], \;\; n_f \le j \le 2 \cdot n_{f\,max} - 1; \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} &B_2 = \left\{b_0, \ldots, b_{(Num-1)}\right\}, \quad b_v = q_v, \\ &v = 0, \ldots, (Num - 1). \end{aligned} \qquad (15)$$

СЛАУ имеет вид:

$$A_2 \cdot X_2 = B_2 \qquad (16)$$

Система (16) имеет множество решений. На практике наиболее часто используют критерий наименьших квадратов, приводящему к оценке вида:

$$X_2^* = (A_2{}^T \cdot A_2)^{-1} A_2{}^T \cdot B_2. \qquad (17)$$

Решение системы (17) является приближенным, но результат получается более точным, чем при решении строгой системы (11). Помехоустойчивость решения достигается путем усреднения действия помех при числе измерений сигнала, превышающим минимальное необходимое.

Вычисление вектора фазовых углов посредством решения системы (17) методом алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций требует примерно такого же количества операций, как и при использовании метода БПФ. При размерности матрицы A_2, равной $Num \times 2$, количество операций, требуемых для решения системы (17), примерно равно $Num \cdot \log_2 Num$. Главная особенность данного метода заключается в том, что для вычисления параметров спектра сигналов выбранной номенклатуры частот, нет необходимости вычислять все параметры спектра сигналов.

Наконец, можно рассмотреть важный для практики случай, когда СЛАУ является слабо определенной. Слабо определенная система – это система, описываемая матрицей A с определителем не равным нулю $|A| \approx 0$, но число обусловленности $|A^{-1}| \cdot |A|$ очень велико. Поскольку некоторые уравнения, входящие в такую систему, представляются линейной комбинацией других уравнений, то фактически сама система является недоопределенной $(N < 2 \cdot n_{f_{max}})$. В зависимости от конкретного вида вектора правой части B, существует либо бесконечное множество решений, либо не существует ни одного. Для решения такого вида систем используется метод регуляризации. Данный метод основан на привлечении дополнительной априорной информации о решении. Концепция регуляризации сводится к замене решения СЛАУ вида (8) на задачу о минимизации функционала Тихонова:

$$\Omega(X,\lambda) = |A \cdot X - B|^2 + \lambda \cdot |X - x0|^2, \quad (18)$$

где λ – малый положительный параметр регуляризации: $x0$ – вектор априорной оценки.

Задачу минимизации функционала Тихонова можно свести к решению другой СЛАУ:

$$(A^T \cdot A + \lambda \cdot I) \cdot X = A^T \cdot B + \lambda \cdot x0, \quad (19)$$

которая при $\lambda \to 0$ переходит в исходную слабо определенную систему, а при больших λ, будучи хорошо определенной, имеет решение $x0$. Очевидно, оптимальным будет некоторое промежуточное значение λ, устанавливающее определенный компромисс между приемлемой обусловленностью и близостью к исходной задаче .

Слабо определенные системы также можно решать с помощью методов LU - и QR - разложений матрицы A. LU - разложение матрицы A называется матричное разложение вида:

$$P \cdot A = L \cdot U, \quad (20)$$

где L и U – нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно, а P – матрица перестановок.

Алгоритм LU - разложения матрицы A заключается в замене исходной системы (8) эквивалентной системой $P \cdot L \cdot U \cdot X = P \cdot B$, а ее, в свою очередь, парой других систем: $L \cdot Y = P \cdot B$ и $U \cdot X = Y$. Сначала из первой СЛАУ определяются промежуточный точный вектор Y, а затем – искомый вектор X. Далее рассмотрим QR – разложение, которое основывается на ортогональном преобразовании, обладающие свойством сохранения нормы вектора. Свойство сохранения нормы вектора при ортогональных преобразованиях, т. е. $|Q \cdot X| = |X|$, дает рецепт поиска псевдорешения вырожденных СЛАУ, а именно, замену исходной задачи минимизации невязки с "плохой" матрицей $|A \cdot X - B|$ задачей $|Q^T \cdot (A \cdot X - B)|$, в которой матрица уже будет "хорошей" благодаря специальному построению матрицы Q. Таким образом, ортогональные разложения используются при решении любых систем [5].

Выводы

Рассмотренный метод алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций позволяет произвести демодуляцию сигнала путем решения СЛАУ без использования метода БПФ. При демодуляции сигнала данным методом необходимо, чтоб СЛАУ была переопределенной, так как именно переопределенная СЛАУ позволяет максимально учитывать информацию о сигнале и дает единственное решение системы. За счет переопределения СЛАУ и достигается помехоустойчивость данного решения, путем усреднения действия помех при числе измерений сигнала. Применение данного метода при демодуляции сигналов позволит вычислять параметры спектра сигналов только нужной номенклатуры частот.

Список литературы

1. *Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов.− М.: Радио и связь, 1983.− 320 с.*
2. *Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра / К. Феер; пер. с англ. под ред. В.И. Журавлева. − М.: Радио и связь, 2000. − 520 с.*
3. *Степанов В.В. Компьютерный анализ сигналов систем радиосвязи / В.В. Степанов, А.А. Матвеев. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003.− 207 с.*
4. *Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд; пер. с англ. Ю.Н. Александрова. – М.: МИР, 1978. – 834 с.*
5. *Васильев К.К. Теория электрической связи: учебное пособие / К.К. Васильев, В.А. Глушков, А.В. Дормидонтов, А.Г. Нестеренко. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 452 с..*

Поступила в редколлегию 1.06.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРАЇЧНА ОБРОБКА СКЛАДНИХ СИГНАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

С.Г. Рассомахін, С.Г. Веклич

Запропоновано спосіб алгебраїчної обробки складних сигнальних конструкцій, за допомогою якого можна здійснювати визначення інформативних параметрів комбінованих сигналів на основі вирішення спеціально складених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: *швидке перетворення Фур'є, системи лінійних рівнянь, цифрова обробка сигналів, сигнальні конструкції, OFDM сигналі, радіомоніторинг.*

THE LINEAR ALGEBRAIC PROCESSING OF COMPLEX SIGNAL CONSTRUCTIONS

S.G. Rassomakhin, S.H. Veklich

The method of algebraic processing of complex signal constructions by means of which it is possible to realize determination of the informative parameters of combined signals on the basis of the decision of specially made systems of the linear algebraic equations is offered.

Keywords: *fast Fourier transform, linear equation system, digital signal processing, signal constructions, OFDM signals, radio monitoring.*