УДК 519.7

В.А. Лещинский, И.А. Лещинская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О ЛОГИЧЕСКОЙ ФОРМАЛИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе рассматривается логический подход к формализации сложных высказываний, т.е. высказываний, в которых можно выделить входящие в их состав другие высказывания. Проанализированы способы построения сложных высказываний. Рассмотрены способы образования сложных высказываний из простых. Проанализировано соотношение естественного и логического языков. В работе изучается только логическая часть естественного языка.

Ключевые слова: *логическая формализация, сложные высказывания, операции с высказываниями, функция истинности, истинностная переменная.*

Введение

Основной задачей математической логики является формализация сложных мыслительных процессов, из которых складывается так называемое логическое мышление. Подобная формализация достигается с помощью построения логических исчислений. Первым и наиболее простым из них является исчисление высказываний, в котором на основе аппарата булевых функций [1] строятся математические описания сложных высказываний. Поясним вначале, что понимается под математическим описанием. С этой целью введем ряд определений. Замена реально существующих объектов (предметов и процессов) математическими абстракциями называется формализацией этих объектов. Так, например, скорость движения физических тел формализуется с помощью понятия производной. Наполнение математических абстракций конкретным содержанием называется интерпретацией этих абстракций. Например, производная интерпретируется как скорость движения. Результат формализации объектов называют математическим описанием этих объектов. Математическое описание, правильно отражающее все существенные свойства объекта формализации, называют адекватным описанием. Адекватное математическое описание объекта принимают в качестве объекта формализации. Мы будем рассматривать сложные высказывания [2, 3].

1. Сложные высказывания

Высказыванием называют любое предложение, которое может быть истинным или ложным. Например, предложение «Дважды два – четыре» – истинное высказывание; предложение «Дважды два - пять» - ложное; высказывание «Идет дождь» в данный момент ложно, однако через некоторое время может оказаться истинным. Предложения, содержащие вопрос или распоряжение, не являются высказываниями. Например, предложения «Который час?», «Решай задачу!» - не высказывания, поскольку бессмысленно говорить об их истинности или ложности. Из уже имеющихся высказываний можно строить новые, которые называются сложными высказываниями.

В математической логике формализуются следующие шесть способов построения сложных высказываний:

1) отрицание высказывания. Из высказывания A получаем высказывание «Не A». Например, из высказывания «Идет дождь» строим высказывание «Не идет дождь», добавляя частицу «не»;

2) конъюнкция высказываний. Из высказываний A и B получаем высказывание «A и B». Например, высказывания «Идет дождь» и «Светит солнце» соединяем союзом «и»: «Идет дождь и светит солнце»;

3) слабая дизъюнкция высказываний. Из высказываний A и B получаем высказывание «A или B». Например, высказывания «Идет дождь» и «Светит солнце» соединяем объединительным союзом «или» (в смысле «или также»): «Идет дождь или светит солнце»;

4) строгая дизъюнкция высказываний. Из высказываний A и B получаем высказывание «Или A, или B». Например, рассмотренные выше высказывания соединяем разделительными союзами «или – или»: «Или идет дождь, или светит солнце»;

5) импликация высказываний. Из высказываний A и B получаем высказывание «Если A, то B». Например, высказывание «Идет дождь» и «Светит солнце» соединяем союзами «если – то»: «Если идет дождь, то светит солнце»;

6) эквиваленция высказывания. Из высказываний A и B получаем высказывание «Если и только если A, то B». Так, для рассмотренных выше высказываний получим: «Если и только если идет дождь, то светит солнце». Заметим, что эквиваленция передается также высказыванием «В том и только в том случае, если A, то B».

Перечисленные способы можно использовать многократно, строя с их помощью все более и более сложные высказывания. Приведем пример сложного высказывания: «Если кто из товарищей опаздывал на молебен, или доходили слухи о какой-нибудь проказе гимназистов, или видели классную даму поздно вечером с офицером, то очень волновался и все говорил, как бы чего не вышло» (А.П. Чехов. «Человек в футляре»). В состав данного сложного высказывания входят следующие простые высказывания: «Кто-то из товарищей опаздывал на молебен», «Доходили слухи о какой-нибудь проказе гимназистов», «Видели классную даму поздно вечером с офицером», «Он очень волновался», «Все говорил, как бы чего не вышло». Это сложное высказывание построено последовательным применением к простым высказываниям слабой дизъюнкции (дважды), конъюнкции и импликации.

Высказывание, в котором можно выделить входящие в его состав другие высказывания, называется сложным высказыванием. Высказывания, не являющиеся сложными, называются простыми. Простое высказывание нельзя построить только что описанными, или какими-либо иными приемами из каких-нибудь других высказываний. Служебные слова «не», «и», «или», «или – или», «если – то», «если и только если - то», с помощью которых образуются сложные высказывания, называют логическими связями. Покажем способ образования сложного высказывания из простых на примере следующей теоремы: если функция определена на отрезке $[a,b]$, в некоторой точке принимает наибольшее значение и в этой точке функция дифференцируема, то ее производная в этой точке равна нулю. Выделяем простые высказывания:

1) «Функция определена на отрезке $[a,b]$» - x;

2) «В некоторой точке принимает наибольшее значение» - y;

3) «В этой точке функция дифференцируема» - z;

4) «Производная функции в этой точке равна нулю» - t.

Сложное высказывание, соответствующее данной теореме, запишется в виде $x \wedge y \wedge z \supset t$.

2. Функция истинности высказывания

Поставим в соответствие каждому высказыванию свою булеву переменную, называемую истинностной переменной этого высказывания. Например, высказыванию «Идет дождь» поставим в соответствие истинностную переменную x, высказыванию «Светит солнце» - переменную y. Значения истинностной переменной называются истинностными значениями. Если высказывание истинно, то его истинностное значение принимаем равным единице, если ложно, то – нулю.

Например, допустим, что сегодня дождя нет, но светит солнце, тогда $x=0, y=1$. Истинностное значение высказывания «Дважды два – пять» равно нулю, а высказывания «Дважды два – четыре» - равно единице.

Справедливо следующее важное утверждение: истинностное значение сложного высказывания однозначно определяется истинностными значениями простых высказываний, входящих в его состав. Например, возьмем высказывание «Идет дождь и светит солнце». Поставим ему в соответствие переменную z. Пусть истинно, что светит солнце. В этом случае будет истинно и наше высказывание, то есть $z=1$. Если же $x=0$ и $y=0$, то $z=0$; если $x=0$, $y=1$, то $z=0$; если $x=1$, $y=0$, то $z=0$. Нетрудно заметить, что функция $z=f(x,y)$ представляет собой конъюнкцию.

Рассмотрим в этой статье логически сложные высказывания. Естественный язык (ЕЯ) описывает не только логику и управляется не только логикой. Например, вопросы и приказ, составляющие неотъемлемую часть языка, не подведомственны логике. Но и в «повествовательной» части ЕЯ многое не входит в логику, например, средства выражения временных или модальных отношений. В этой части языка тоже есть элементарные высказывания и есть сложные, причем языковые средства образования сложных высказываний часто совпадают со средствами, используемыми в логической части языка. Мы далее будем говорить только о логической части ЕЯ (части, на которой может быть интерпретирована логика), следовательно, только о логически сложных высказываниях.

Высказывания, образованные одним из перечисленных выше шести способов, назовем логически сложными. Найдем функции истинности для каждого из логически сложных высказываний:

1. Отрицание «Не A». Пусть x – истинностная переменная высказывания «A», y - истинностная переменная высказывания «Не A». Требуется найти вид функции $y=f(x)$. Например, пусть A=«Идет дождь», «Не A» - «Не идет дождь». Когда A истинно, то B – ложно. Когда A ложно, то B – истинно. Функция истинности данного логически сложного высказывания «Не A» имеет вид $y=\overline{x}$ (табл. 1).

2. Конъюнкция: A и B. Обозначим через x и y истинностные переменные высказываний A и B соответственно. Таблица значений функции истинности данного логически сложного высказывания строится следующим образом: если $x=1$ и $y=1$, то $z=1$; если $x=0$ и $y=0$, то $z=0$; если $x=0$ и

$y = 1$, то $z = 0$; если $x = 1$ и $y = 1$, то $z = 0$. Функция истинности запишется: $z = xy$ (табл. 2);

3. Слабая дизъюнкция: A или B. Построим таблицу сечений функции истинности данного логически сложного высказывания: если $x = 1$ и $y = 1$, то $z = 1$; если $x = 1$ и $y = 0$, то $z = 1$; если $x = 0$ и $y = 1$, то $z = 1$; если $x = 0$ и $y = 0$, то $z = 0$ (табл. 3). Таким образом, $z = x \vee y$.

Сформулируем правило установления истинного значения сложного высказывания по истинностным значениям простых высказываний, входящих в его состав: если набор истинностных сечений простых высказываний допускается сложным высказыванием, то истинностное значение сложного высказывания равно единице, если не допускается, то – нулю.

4. Строгая дизъюнкция: или A или B. Применяя сформулированное выше правило, построим таблицу значений функции истинности данного логически сложного высказывания. Нетрудно видеть, что наборы $x = 0$ и $y = 0$ и $x = 1$, $y = 1$ не допускаются функцией истинности, а наборы $x = 0$, $y = 1$ и $x = 1$, $y = 0$ - допускаются (табл. 4) $z = x + y$.

Таблица 1

x	$y = \overline{x}$
0	1
1	0

Таблица 2

x	y	$z = x\,y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 3

x	y	$z = x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 4

x	y	$z = x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблица 5

x	y	$z = x \supset y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица 6

x	y	$z = x \sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 7

x	y	$z = \overline{x}\,\overline{y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

5. Импликация: Если A то B. Набор значений истинностных переменных $x = 1$, $y = 0$ импликацией не допускается; остальные наборы допускаются (табл. 5), $z = x \supset y$ (пример такого рода высказывания: «Если идет дождь, то тротуары мокрые»).

6. Эквиваленция: Если и только если A, то B. В данном случае наборы $x = 0$, $y = 1$ и $x = 1$, $y = 0$ не допускаются; наборы $x = 0$ и $y = 0$ и $x = 1$, $y = 1$ - допускаются (табл. 6), $z = x \sim y$.

Покажем на примерах использование логически сложных высказываний.

Запишем функции истинности для следующих сложных высказываний:

1. Ложно, что A. Очевидно, что таблица значений функции истинности данного высказывания совпадает с табл. 1,

$$y = \overline{x}.$$

2. Так как A, то B .Функцией истинности данного высказывания запрещены следующие наборы истинностных переменных: $x = 1$, $y = 0$ (табл. 5),

$$z = x \supset y.$$

3. A, но B. Значения функции истинности данного высказывания совпадают с табл. 2,

$$z = x\,y.$$

4. A, тем не менее B. Функция истинности данного высказывания совпадает с предыдущей.

$$z = x\,y;$$

5. A и B. Функцией истинности данного высказывания также является конъюнкция,

$$z = x\,y.$$

6. A, B. Функция истинности имеет вид

$$z = x\,y.$$

7. Когда A, тогда и B. Очевидно, что функция истинности данного высказывания допускает все наборы значений, кроме $x = 1$, $y = 0$ (табл. 5), следовательно

$$z = x \supset y.$$

8. A, и все же B. Функция истинности данного высказывания – конъюнкция,

$$z = x\,y.$$

9. A равносильно B. Таблица значений $z(x, y)$ совпадает с табл. 6; функция истинности – эквиваленция,

$$z = x \sim y.$$

10. A, однако B. Функцией истинности данного высказывания является конъюнкция,

$$z = x\,y.$$

11. A, а B. В данном случае также

$$z = x\,y.$$

12. A, а также B,

$$z = x\,y\,.$$

13. Высказывание A справедливо. Функция истинности имеет вид

$$y = x.$$

14. Из A следует B. Функцией истинности данного высказывания является импликация (табл. 5):

$$z = x \supset y\,.$$

15. Высказывание A ложно. Функцией истинности является отрицание

$$y = \overline{x}\,.$$

16. A в том и только в том случае, когда B. Функцией истинности является эквиваленция (табл. 6):

$$z = x \sim y\,.$$

17. A вытекает из B,

$$z = x \supset y\,.$$

18. Либо A, либо B. Функцией истинности данного сложного высказывания является строгая дизъюнкция, не допускающая наборы истинностных переменных: $x = 0$, $y = 0$ и $x = 1$, $y = 1$ (табл. 4). Таким образом,

$$z = x + y\,.$$

19. Ни A, ни B. Функция истинности данного сложного высказывания допускает только один набор значений истинностных переменных: $x = 0$, $y = 0$ (табл. 7):

$$z = \overline{xy}\,.$$

Как видим, данный способ образования сложных высказываний, распространенный в естественном языке, не отражен в логической теории и отсутствует в числе основных логических сложных высказываний.

Выводы

При переходе от реальной фразы естественного языка к формальному определению конкретного типа высказывания мы рискуем потерять или исказить некоторую информацию, содержащуюся во фразе. И действительно, в ряде случаев такая потеря происходит, но она обычно касается несущественных для логик нюансов речи. Именно ввиду этого аппарат исчисления высказываний полностью удовлетворяет нуждам математики. В то же время применение этого аппарата при анализе произведений художественной литературы показал бы его недостаточность, поскольку там отбрасываемые нами нюансы имеют очень существенное, а иногда и решающее значение. Так, например, в русской речи мы получаем конъюнкцию тогда, когда соединяем две фразы союзами «и», «но», «однако», «вместе с тем» или просто через запятую. Записанные рядом две фразы, разделенные точкой, также дают конъюнкцию.

В качестве примера конъюнкции приведем следующую фразу: «Через три точки всегда можно провести плоскость, однако существует четыре точки, не лежащие в одной плоскости». Если бы мы союз «однако» заменили союзом «и», то получили бы то же самое высказывание – конъюнкцию, хотя ясно, что фраза в чем-то претерпела бы изменение по смыслу. Таким образом, на данном примере видна та потеря, которую мы получаем при переходе от реальных фраз человеческой речи к их формальному эквиваленту.

Список литературы

1. Бондаренко М.Ф. Булева структура текста / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Н.В. Шаронова // Бионика интеллекта. – 2010. - № 3. – С. 27-35.

2. Войшвилло Е.К. Логика / Е.К. Войшвилло, М.Г. Дегтярев. - М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2001. – 528 с.

3. Логика высказываний // Новая философская энциклопедия. Е – М. - М., Мысль, 2010. – С. 436.

Поступила в редколлегию 28.04.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

О ЛОГИЧЕСКОЙ ФОРМАЛИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В.О. Лещінський, І.О. Лещінська

У роботі розглядається логічний підхід до формалізації складних висловлювань, тобто висловлювань, в яких можна виділити інші висловлювання, що входять до їх складу. Проаналізовані способи побудови складних висловлювань. Розглянуті способи утворення складних висловлювань з простих. Проаналізовано співвідношення природної і логічної мов. У роботі вивчається тільки логічна частина природної мови.

Ключові слова: *логічна формалізація, складні висловлювання, операції з висловлюваннями, функція істинності, істинна змінна.*

ABOUT DIFFICULT EXPRESSIONS LOGICAL FORMALIZATION

V.A. Leschinsky, I.A. Leschinska

The logical going is in-process examined near formalization of difficult expressions, i.e. expressions in that it is possible to distinguish included in their composition other expressions. The methods of construction of difficult expressions are analysed. The methods of formation of difficult expressions are considered from simple. Correlation of human and logical languages is analysed. Logical part of human language is in-process studied only.

Keywords: *logical formalization, difficult expressions, operations with expressions, function of truth, truth variable.*