УДК 519.7

В.А. Лещинский, И.А. Лещинская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О ФОРМУЛЬНОМ ОПИСАНИИ ПЕРЕМЕННЫХ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе рассматривается обобщение понятия сложного высказывания путем введения переменных высказываний. Рассмотрены тождественно истинные, тождественно ложные и условно истинные высказывания. Рассмотрены наиболее известные законы логики высказываний. Показано, что все они представляют собой тождественно истинные высказывания.

Ключевые слова: *логическая формализация, сложные высказывания, переменные высказывания, операции с высказываниями, функция истинности, логика высказываний.*

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1, 2], в которых рассматривался логический подход к формализации сложных высказываний. Проанализированы способы построения сложных высказываний; рассмотрены способы образования сложных высказываний из простых; соотношение естественного и логического языков, при рассмотрении только логической части естественного языка. В этих работах изучались только постоянные высказывания.

Здесь мы продолжим рассмотрение сложных высказываний и обобщим понятие высказывания путем введения переменных высказываний [3].

Результаты исследований

Рассмотрим несколько примеров сложных высказываний, взятых из сказки Алексея Толстого «Буратино». Для обследования больного Буратино Мальвина созывает консилиум из трех врачей: знаменитого доктора Совы, фельдшера Жабы и народного знахаря Богомола. Заключение народного знахаря Богомола было таково: «Одно из двух – или пациент жив, или он умер. Если он жив – он останется жив или не останется жив. Если он мертв его можно оживить или нельзя оживить». Остальные доктора реагировали на это заключение следующим образом: «Шарлатанство», - сказала Сова, взмахнула мягкими крыльями и улетела на темный чердак. У жабы от злости вздулись все бородавки. «Какое отвратительное невежество!» - квакнула она и, шлепая животом, запрыгала в сырой подвал». Почему высказывания народного знахаря Богомола вызвали такое негодование у остальных членов консилиума? Очевидно, ввиду их полной бессодержательности. Запишем функции истинности для трех высказываний знахаря Богомола:

Для высказывания «Или пациент жив, или он умер» введем истинную переменную x, тогда функция истинности данного высказывания запишется: $x + \overline{x}$;

«Если он жив – он останется жив или не останется жив» - y, функция истинности имеет вид $x \supset y \vee \overline{y}$;

«Если он мертв – его можно оживить или нельзя оживить» - z, функция истинности: $\overline{x} \supset z \vee \overline{z}$.

Покажем, что все три функции тождественно равны единице. С этой целью используем представленные функции $x + y$ и $x \supset y$ соответственно в форме СДНФ и СКНФ:

$$x + y = x\overline{y} \vee \overline{x}y,\ x \supset y = \overline{x} \vee y.$$

Тогда функции истинности запишутся:

$$x + \overline{x} = \overline{x}\,\overline{x} \vee x\overline{\overline{x}} = \overline{x} \vee x = 1;$$

$$x \supset y \vee \overline{y} = x \vee 1 = 1;$$

$$\overline{x} \supset z \vee \overline{z} = \overline{\overline{x}} \vee z \vee \overline{z} = x \vee 1 = 1.$$

Сложное высказывание, функция истинности которого тождественно равна единице, называется тождественно истинным высказыванием. Тождественно истинное высказывание остается истинным вне зависимости от истинности или ложности входящих в него простых высказываний, оно не накладывает никаких ограничений на истинностные значения простых высказываний и поэтому бессодержательно. Таким образом, народный знахарь Богомол, изрекая тождественно истинные высказывания, все говорил правильно, но при этом не сообщал никакой полезной информации. Он ничем не рисковал. Знахарь Богомол был профаном в медицине, зато тонким знатоком математической логики.

До сих пор мы рассматривали высказывания с вполне конкретным содержанием – постоянные высказывания. Однако ничто не мешает нам обобщить понятие высказывания и ввести переменные высказывания. Конкретные высказывания, описывающие вполне определенные события или факты, называются постоянными высказываниями. Например: «Идет дождь», «Дважды два – четыре». Переменная, заданная из множества всевозможных постоянных высказываний, называется переменным высказыванием. Переменные высказывания будем обозначать заглавными латинскими буквами A, B, C,…, X, Y, Z.

Если в тождественно истинное высказывание вместо входящих в него постоянных высказываний подставить переменные высказывания, то оно по-прежнему останется истинным. Например, подставим в высказывание «Идет дождь или не идет дождь» вместо постоянного высказывания «Идет дождь» переменное высказывание X. В результате получим истинное высказывание «X или не X». Иначе говоря: «Истинное высказывание X или истинно высказывание не X». Это означает, что одно из двух высказываний X или «не X» обязательно будет истинным. Не может так случиться, чтобы оба высказывания X и «не X» одновременно оказались ложными. «X или не X, а третьего не дано» («Tertium non datur» - говорили древние римляне). Последнее высказывание уже не выглядит бессодержательным. Оно представляет собой один из важнейших законов формальной логики, который носит название закон исключенного третьего. Формула закона исключенного третьего имеет вид: $X \vee \bar{X}$.

Справедлив следующий важный факт: все законы логики высказываний являются тождественно истинными высказываниями. Каждое тождественно истинное высказывание, в состав которого входят переменные высказывания, может быть проинтерпретировано как некоторый закон логики высказываний. Математическим эквивалентом законов логики высказываний является формулы алгебры логики, тождественно равные единице. Приведем примеры законов алгебры логики, тождественно равные единице. В эти формулы можно ввести дополнительно знаки X, $+$, $\supset$, $\downarrow$. Затем необходимо перейти от формул к самим законам, заменив знаки булевых операций логическими связками, а булевы переменные – переменными высказываниями. Например, от формулы алгебры логики, тождественно равной единице, переходим к закону логики высказываний: «Если из X следует У и из X следует Z, то из X следует Y и Z»

$$(x \supset y)(x \supset z) \supset (x \supset yz) \equiv 1.$$

«Если из X следует Y, то из $\bar{Y}$ следует $\bar{X}$»

$$(x \supset y) \supset (\bar{y} \supset \bar{x}) \equiv 1.$$

«X и Y эквивалентно Y и X»

$$x\,y \sim y\,x \equiv 1.$$

Содержание закона логики высказываний определяется не его функцией истинности (т.к. все эти функции тождественно равны единице, они совпадают), а его формулой. Введем понятие тождественно ложного высказывания: сложное высказывание, функция истинности которого тождественно равна нулю, называется тождественно ложным высказыванием. Например: A и $\bar{A}$. Очевидно, что отрицание любого тождественно истинного высказывания есть тождественно ложное высказывание и наоборот. Высказывания, не являющиеся ни тождественно истинными, ни тождественно ложными, называются условно истинными высказываниями. Например: «Идет дождь». Рассмотрим наиболее известные законы логики высказываний:

Закон противоречия: «Не могут быть истинными вместе высказывания «X» и «не X», или в символической форме $\overline{X\bar{X}}$.

Закон дедукции: «Если истинное высказывание X, и из X следует Y, то высказывание Y тоже истинно» (этот закон известен еще как modus ponens – правило заключения): $(X \supset Y) \supset Y$.

Цепной закон: «Если из X следует Y, и из Y следует Z, то из X следует Z»:

$$(X \supset Y)(Y \supset Z) \supset (X \supset Z).$$

Закон контрапозиции: «Если из X следует Y, то из «не Y» следует «не X»»:

$$(X \supset Y) \supset (\bar{Y} \supset \bar{X}).$$

Закон двойного отрицания: «Высказывание «не не X» эквивалентно высказыванию X»: $\bar{\bar{X}} \sim X$.

Закон импортации: «Если из X следует, что из Y вытекает Z, то из X и Y следует Z»:

$$X \supset (Y \supset Z) \supset (XY \supset Z);$$

Закон экспортации: «Если из X и Y следует Z, то из X следует, что из Y вытекает Z»:

$$(XY \supset Z) \supset (X \supset (Y \supset Z)).$$

Закон приведения к абсурду: «Если истинны высказывания X и «не X», то истинно любое высказывание Y»: $X\bar{X} \supset Y$.

Законы коммутативности:

а) «высказывание «X и Y» эквивалентно высказыванию «Y и X»»: $XY \sim YX$.

б) «Высказывание «X или Y» эквивалентно высказыванию «Y или X»»: $X \vee У \sim У \vee X$

Законы ассоциативности:

а) «Высказывание «X или Y» или Z «эквивалентно высказыванию «X или «Y или Z»»:

$$(X \vee У) \vee Z \sim X \vee (У \vee Z).$$

б) «Высказывание «X и Y» и Z» эквивалентно высказыванию «X и «Y и Z»»:

$$(XУ)Z \sim X(УZ).$$

Законы дистрибутивности:

а) «Высказывание «X» и «Y или Z» эквивалентно высказыванию «X и Y» или «X и Z»»:

$$X(У \vee Z) \sim XУ \vee XZ.$$

б) «Высказывание X или «Y и Z» эквивалентно высказыванию «X или Y» и «X или Z»:

$$X \vee УZ \sim (X \vee У)(X \vee Z).$$

Законы идемпотентности:

а) «Высказывание «X или X» эквивалентно высказыванию X»: X.

б) «Высказывание «X и X» эквивалентно высказыванию X»:

$$X \wedge X \sim X.$$

Законы элиминации:

а) «Высказывание X и «X или Y» эквивалентно высказыванию X»:

$$X(X \vee У) \sim X.$$

б) «Высказывание «X или «X и Y»» эквивалентно высказыванию X»:

$$X \vee XУ \sim X.$$

Законы де Моргана:

а) «Высказывание «не «X или Y» эквивалентно высказыванию «не X» и «не Y»»:

$$\overline{X \vee Y} \sim \overline{X} \wedge \overline{Y}.$$

б) «Высказывание «не «X или Y» эквивалентно высказыванию «не X» или «не Y»»:

$$\overline{XY} \sim \overline{X} \vee \overline{Y}.$$

Докажем, что все сформулированные выше законы логики высказываний представляют собой тождественно истинные высказывания, т.е. их функции истинности тождественно равны единице. При преобразовании высказываний все пользуемся законами алгебры логики.

1. Закон противоречия: $\overline{X\overline{X}} = 1$. Пусть высказывание X ложно, тогда имеем $\overline{0*1} = \overline{0} = 1$; если высказывание X истинно, то $\overline{1*0} = \overline{0} = 1$. Таким образом, тождественная истинность высказывания $\overline{X\overline{X}}$ доказана.

2. Закон дедукции:

$$x(x \supset y) \supset y = \overline{x(\overline{x} \vee y)} \vee y =$$

$$= \overline{x} \vee \overline{(\overline{x} \vee y)} \vee y = \overline{x} \vee x\overline{y} \vee y = 1.$$

Поскольку в результате преобразований мы получили функцию, тождественно равную единице (табл. 1), справедливость данного закона доказана.

Таблица 1

Функция, тождественно равная единице

x	y	$f = \overline{x} \vee y \vee x \vee \overline{y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Цепной закон:

$$(x \supset y)(y \supset z) \supset (x \supset z) =$$

$$= \overline{(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z)} \vee (\overline{x} \vee z) =$$

$$= \overline{(\overline{x} \vee y)} \vee \overline{(\overline{y} \vee z)} \vee (\overline{x} \vee z) = xy \vee y\overline{z} \vee \overline{x} \vee z = 1.$$

Функция истинности данного высказывания тождественно равны единице (табл. 2), следовательно, справедливость цепного закона доказана.

Таблица 2

Функция истинности для $f = \overline{x} \vee z \vee x\overline{y} \vee y\overline{z}$

x	y	z	$f = \overline{x} \vee z \vee x\overline{y} \vee y\overline{z}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

4. Закон контрапозиции:

$$(x \supset y) \supset (\overline{y} \supset \overline{x}) = \overline{(\overline{x} \vee y)} \vee y \vee \overline{x} = x\overline{y} \vee y \vee \overline{x} = 1.$$

В результате преобразований получили функцию истинности, тождественно равную единице (табл. 1), откуда следует тождественная истинность данного высказывания.

5. Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} \sim x = \overline{\overline{\overline{x}}} * \overline{x} \vee \overline{\overline{x}} * x = \overline{x} \vee x = 1$$

согласно закону исключенного третьего.

6. Закон импортации:

$$(x \supset (y \supset z)) \supset (xy \supset z) = \overline{(\overline{x} \vee (\overline{y} \vee z)} \vee (\overline{xy} \vee z) =$$

$$= \overline{x}\,\overline{(\overline{y} \vee z)} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = xy\overline{z} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = 1.$$

Из табл. 3 значений полученной функции истинности видно, что она тождественно равна единице. Следовательно, данное высказывание тождественно истинно.

Таблица 2

Функция истинности для $f = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee xy\overline{z}$

x	y	z	$f = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee xy\overline{z}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

7. Закон экспортации:

$$(xy \supset z) \supset (x \supset (y \supset z)) = \overline{(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)} \vee$$

$$\vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z) = xy\overline{z} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = 1.$$

Как видим, формула данного высказывания после преобразований совпала с формулой предыдущего закона, тождественно равной единице. Таким образом, справедливость данного закона доказана.

8. Закон приведения к абсурду:

$$x\overline{x} \supset y = \overline{x\overline{x}} \vee y = \overline{x} \vee x \vee y = 1 \vee y = 1.$$

9. Законы коммутативности:

а) $xy \sim yx = xy \wedge yx \vee \overline{(xy)} \wedge \overline{(yx)} =$

$$= (\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{y} \vee \overline{x}) \vee xy = \overline{x} \vee \overline{y} \vee xy = \overline{xy} \vee xy = 1.$$

б) $x \vee y \sim y \vee x = \overline{x \vee y} \wedge \overline{y \vee x} \vee (x \vee y)(y \vee x) =$

$= \bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{x} \vee (y \vee x) = \bar{x}\bar{y} \vee (x \vee y) = \overline{x \vee y} \vee (x \vee y) = 1.$

10. Законы ассоциативности:

а) $(x \vee y) \vee z \sim (x \vee (y \vee z)) = \overline{((x \vee y) \vee z)} \wedge$

$\wedge \overline{(x \vee (y \vee z))} \vee ((x \vee y) \vee z)(x \vee (y \vee z)) =$

$= (\overline{x \vee y} \wedge \bar{z})(\bar{x} \wedge \overline{y \vee z}) \vee (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee z) =$

$= (\bar{x}\bar{y}\bar{z})(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee z) =$

$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (x \vee y \vee z) = \overline{(x \vee y \vee z)}(x \vee y \vee z) = 1.$

б) $(xy)z \sim x(yz) = \overline{(xy)z} \wedge \overline{x(yz)} \vee (xy)z \wedge x(yz) =$

$= (\overline{xy} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \overline{yz}) \vee xyz \wedge xyz = (\overline{xy} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \overline{yz}) \vee xyz \wedge$

$\wedge xyz = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee xyz = \overline{xyz} \vee xyz = 1.$

11. Законы дистрибутивности:

а) $x(y \vee z) \sim xy \vee xz = \overline{x(y \vee z)} \wedge \overline{(xy \vee xz)} \vee$

$\vee x(y \vee z) \wedge (xy \vee xz)) = (\bar{x} \vee \overline{(y \vee z)}) \wedge (\overline{xy} \wedge \overline{xz}) \vee$

$\vee (xy \vee xz)(xy \vee xz) = (\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z})((\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{z})) \vee$

$\vee xy \vee xz = \bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} \vee (xy \vee xz) = \bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} \vee$

$\vee \overline{x(y \vee z)} = \overline{x(y \vee z)} \vee x(y \vee z) = 1;$

б) $x \vee yz \sim (x \vee y(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}))(x \vee z) =$

$= \overline{(x \vee yz)}\,\overline{(x \vee y)(x \vee z)} \vee (x \vee yz)(x \vee y)(x \vee z) =$

$= (\bar{x} \wedge \overline{yz})(\overline{(x \vee y)} \vee \overline{(x \vee z)}) \vee (x \vee yz)(x \vee xz \vee xy \vee$

$\vee yz) = \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}) \vee (x \vee yz)(x \vee yz) =$

$= (\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z})(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}) \vee (x \vee yz)(x \vee xz \vee xz) =$

$= (\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z})((\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{z})) \vee (x \vee yz) =$

$= (\bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee (x \vee yz) = \overline{(x \vee yz)} \vee (x \vee yz) = 1.$

12. Законы идемпотентности:

а) $x \vee x \sim x = \overline{x \vee x} \wedge \bar{x} \vee (x \vee x)x =$

$= \bar{x} \wedge \bar{x} \wedge \bar{x} \vee xx \vee xx = \bar{x} \vee x = 1;$

б) $x \wedge x \sim x = \overline{x \wedge x} \wedge \bar{x} \vee (x \wedge x)x = (\bar{x} \vee \bar{x})\bar{x} \vee$

$\vee xxxx = \bar{x} \vee \bar{x} \vee xx = \bar{x} \vee x = 1.$

13. Законы элиминации:

а) $x(x \vee y) \sim x = \overline{x(x \vee y)} \wedge \bar{x} \vee x(x \vee y)x =$

$= \overline{x \vee xy)} \wedge \bar{x} \vee (x \vee xy)x = \bar{x} \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{x} \vee$

$\vee x \vee xy = \bar{x} \vee \bar{x}\bar{y} \vee x \vee xy = 1 \vee xy \vee \bar{x}\bar{y} = 1;$

б) $(x \vee xy) \sim x = \overline{(x \vee xy)} \wedge \bar{x} \vee (x \vee xy)x =$

$= \bar{x} \wedge \overline{xy} \wedge \bar{x} \vee x \vee xy = \bar{x}(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x \vee xy =$

$= \bar{x} \vee \bar{x}\bar{y} \vee x \vee xy = 1 \vee xy \vee \bar{x}\bar{y} = 1;$

14. Законы де Моргана:

а) $\overline{x \vee y} \sim \bar{x}\bar{y} = \overline{\overline{x \vee y}} \wedge \overline{\overline{xy}} \vee \overline{(x \vee y)}\bar{x}\bar{y} = (x \vee y) \wedge$

$\wedge (x \vee y) \wedge \bar{x}\bar{y} \wedge \bar{x}\bar{y} = x \vee y \vee \bar{x}\bar{y} = x(x \vee \bar{y}) \vee$

$\vee y(x \vee \bar{x}) \vee \bar{x}\bar{y} = xy \vee x\bar{y} \vee xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} =$

$= x(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y}) = x \vee \bar{x} = 1;$

б) $xy \sim x \vee y = xy(x \vee y) \vee xy(x \vee y) = x(x \vee y) \vee$

$\vee (\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y}) = xy \vee \bar{x} \vee \bar{y} = xy \vee \bar{x}(y \vee \bar{y}) \vee$

$\vee \bar{y}(x \vee \bar{x}) = xy \vee \bar{x}y \vee \overline{xy} \vee x\bar{y} \vee \overline{xy} = xy \vee \overline{xy} \vee$

$\vee \bar{x}y \vee x\bar{y} = y(x \vee \bar{x}) \vee \bar{y}(x \vee \bar{x}) = y \vee \bar{y} = 1.$

Таким образом доказано, что все сформулированные выше законы логики высказываний – тождественно истинные высказывания.

Вывод

В статье проанализирован логический подход к формульному описанию переменных сложных высказываний. Доказано, что все законы логики высказываний представляют собой тождественно истинные высказывания, т.е. их функции истинности тождественно равны единице.

Список литературы

1. *Лещинский В.А. О логической идентификации начальных математических понятий / В.А. Лещинский // Системы обработки информации. – Х.: ХУПС, 2013. – № 6 (113). – С. 174-177.*
2. *Лещинский В.А. О формульной записи сложных высказываний / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2016. – № 2 (47). – С. 105-107.*
3. *Герасимов А.С. Курс математической логики и теории вычислимости / А.С. Герасимов. - СПб.: ЛЕМА, 2011. – 284 с.*

Поступила в редколлегию 28.04.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПРО ФОРМУЛЬНИЙ ОПИС ЗМІННИХ СКЛАДНИХ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

В.О. Лещінський, І.О. Лещінська

У роботі розглядається узагальнення поняття складного висловлювання шляхом введення змінних висловлювань. Розглянуті тотожно істинні, тотожно неістинні і умовно істинні висловлювання. Розглянуті найбільш відомі закони логіки висловлювань. Показано, що усі вони є тотожно істинними висловлюваннями.

Ключові слова: *логічна формалізація, складні висловлювання, змінні висловлювання, операції з висловлюваннями, функція істинності, логіка висловлювань.*

ABOUT THE VARIABLE DIFFICULT EXPRESSIONS DESCRIPTION AS FORMULAS

V.A. Leschinsky, I.A. Leschinska

Generalization of concept of difficult expression is in-process examined by introduction of variable expressions. Veritable, identically false and conditionally veritable expressions are considered identically. The most known laws of logic of expressions are considered. It is shown that all of them are veritable expressions identically.

Keywords: *logical formalization, difficult expressions, variable expressions, operations with expressions, function of truth, logician of expressions.*