УДК 519.7

В.А. Лещинский, И.А. Лещинская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О ФОРМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе вводятся понятия формальной непротиворечивости, полноты и разрешимости логического исчисления. Показано, как доказать методом интерпретации независимость аксиом логического исчисления.

Ключевые слова: *исчисление высказываний, формальная непротиворечивость, полнота, разрешимость, логическое исчисление, независимость аксиом, метод интерпретации.*

Введение

Любое логическое исчисление создается для формализации некоторой конкретной области логического знания. Однако, появившись на свет, логическое исчисление начинает жить своей собственной жизнью. Часто обнаруживается, что логическое исчисление, созданное для одной области знания, оказывается применимым также и для некоторых других областей знания. Так, например, мы уже знаем, что исчисление высказываний (ИВ) имеет по крайней мере четыре различных интерпретации, т.е. четыре различные области применения (лингвистическую, логическую, алгебраическую и теоретико-множественную) [1 – 3].

Изложение основного материала

1. Формальная непротиворечивость исчисления высказываний

Логическое исчисление обычно стремятся сделать независимым от формализуемых им областей знания. Введенные же нами ранее понятия содержательной непротиворечивости и содержательной полноты существенно связаны с логической интерпретацией исчисления высказываний, опираются на нее. Между тем, непротиворечивость и полнота является очень важными свойствами логического исчисления, и хотелось бы определить их чисто формально, без ссылок на содержательные соображения. С этой целью вводят понятия формальной непротиворечивости и формальной полноты логического исчисления. Логическое исчисление называется формально непротиворечивым, если из его аксиом невозможно вывести ни одной формулы вместе с ее отрицанием. Каждое логическое исчисление обязано быть формально непротиворечивым. Формально противоречивое логическое исчисление не обладает предсказательной силой. В нем, согласно закону приведения к абсурду, из теорем X и «не X» можно вывести любую формулу.

Однако не существует ни одной научной области, в которой любое высказывание было бы истинным. Формально противоречивое логическое исчисление не может быть разумным образом интерпретировано. Для формально противоречивого логического исчисления не существует ни одной научной области, которая могла бы быть им формализована, следовательно, такое исчисление бесполезно. Посмотрим, как же обстоит дело в ИВ. Оказывается, что ИВ формально непротиворечиво. Действительно, в ИВ выводимы только тождественно истинные высказывания. Отрицанием же любого тождественно истинного высказывания является тождественно ложное высказывание, а оно, как мы знаем, не выводимо.

2. Формальная полнота и разрешимость исчисления высказываний

Рассмотрим теперь понятие формальной полноты логического исчисления. Логическое исчисление называется формально полным, если добавление к его аксиомам какой-либо формулы, не являющейся теоремой, делает это исчисление формально противоречивым. Формальная полнота логического исчисления означает, что класс его теорем предельно широк. Желательно, но не обязательно, чтобы логическое исчисление было формально полным.

Обсудим теперь вопрос о формальной полноте в ИВ. Оказывается, что ИВ формально полно. Действительно, присоединим к системе аксиом ИВ формулу, интерпретируемую как тождественно истинное высказывание. Рассмотрим алгебраическую интерпретацию этой формулы. Существует набор булевых значений переменных, входящих в эту формулу, обращающий ее в нуль. Если некоторой букве A, входящей в формулу, соответствует нулевое значение, то подставляем вместо нее формулу $A \wedge \overline{A}$, если единичное, то $A \vee \overline{A}$. В результате такой подстановки получаем формулу, тождественно равную нулю, интерпретируемую как тождественно ложное высказывание. Отрицание этого высказывания есть тождественно истинное высказывание, то есть теорема. Таким образом, из новой системы аксиом мы вывели две теоремы - некоторую формулу вместе с ее отрицанием.

Еще одним важным требованием, предъявляемым к логическому исчислению, является его разрешимость. Это требование является не обязательным, но желательным. Логическое исчисление называется разрешимым, если существует механическая процедура (алгоритм) выделения теорем из множества всевозможных формул. Как было показано ранее [1], для ИВ существует разрешающая процедура Поста, следовательно, ИВ разрешимо.

Пример. Пользуясь разрешающей процедурой Поста, установить, является ли законом логики формула

$$(A\vee B\vee C\supset A\vee C\vee(B\supset D))\vee$$
$$\vee((A\supset C)\supset C\overline{D})\vee D(A\supset C).$$

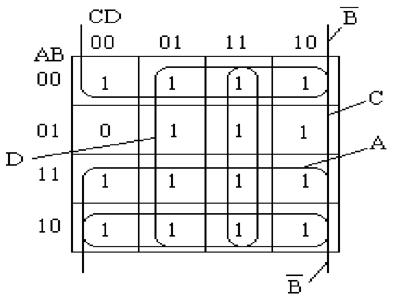
Решение: Преобразуем данную формулу, выразив импликацию через отрицание и дизъюнкцию:

$$(A\vee B\vee C\supset A\vee C\vee(B\supset D))\vee((A\supset C)\supset C\overline{D})\vee$$
$$\vee D(A\supset C)=(\overline{A\vee B\vee C}\vee A\vee C\vee \overline{B}\vee D)\vee(\overline{\overline{A}\vee C}\vee \overline{D})\vee$$
$$\vee D\overline{A}\vee DC)=\overline{ABC}\vee A\vee C\vee \overline{B}\vee D\vee A\overline{C}\vee$$
$$\vee C\overline{D}\vee D\overline{A}\vee DC=A\vee \overline{B}\vee C\vee D.$$

Для получения функции построим диаграмму Вейча (табл. 1). Из диаграммы Вейча видно, что данная функция не равна тождественно единице, следовательно, заданная формула не является законом логики высказываний.

Таблица 1

Диаграмма Вейча



3. Независимость аксиом исчисления высказываний

Доказательство независимости первой аксиомы исчисления высказываний.

Для того, чтобы логическое исчисление не содержало лишних аксиом, необходимо выбрать аксиомы, независимые друг от друга. Аксиомы называются независимыми, если ни одну из них невозможно вывести из совокупности остальных. Если же аксиомы зависимы, то число их можно сократить, следовательно, система зависимых аксиом неэкономна. Независимость аксиом логического исчисления доказывают методом интерпретации. Остановимся на общей характеристике этого метода. Доказательство независимости аксиом логического исчисления методом интерпретации осуществляют следующим образом. Изобретают такую формальную интерпретацию символов этого исчисления, чтобы в ней все аксиомы, кроме первой, обладали бы некоторым свойством. Свойство должно быть выбрано так, чтобы применение правил вывода к формулам, обладающим этим свойством, снова приводило бы к формулам с этим же свойством. Если удалось найти нужную интерпретацию символов и нужное свойство формулы, значит, первая аксиома независима от остальных. Для доказательства независимости второй аксиомы требуется изобрести иную интерпретацию символов или другое свойство формул, удовлетворяющие нужным требованиям. Независимость остальных аксиом логического исчисления доказывается аналогично.

Утверждение: все аксиомы исчисления высказываний независимы (имеются в виде аксиомы Рассела и Гильберта). В качестве иллюстрации метода интерпретаций докажем независимость первой аксиомы.

Доказательство. Буквы ИВ будем интерпретировать как переменные трехзначной логики, принимающие значения 0, 1, 2. Знак 1 интерпретируем как следующую функцию трехзначной логики: $\neg 0=1$, $\neg 1=1$, $\neg 2=2$. Знак $\vee$ интерпретируем как арифметическое умножение чисел ($0\vee 2=0$, $1\vee 2=2$ и т.д.), кроме случая $2\vee 2=2$. (Заметим, что данная интерпретация является пятой по счету среди всех рассмотренных нами интерпретаций ИВ и второй алгебраической). Проверим, что вторая, третья и четвертая аксиомы в этой интерпретации тождественно равны нулю. При доказательстве используем соотношение $A\supset B=\overline{A}\vee B$.

Рассмотрим сначала вторую аксиому ИВ:

$$A\vee B\supset B\vee A=\overline{A\vee B}\vee B\vee A=1(A\vee B)\vee B\vee A.$$

Из табл. 2, 3-й столбец, видно, что в данной интерпретации вторая аксиома представляет собой функцию, тождественно равную нулю.

Рассмотрим теперь третью аксиому исчисления высказываний:

$$A\supset A\vee B=\overline{A}\vee A\vee B=1A\vee A\vee B.$$

Приведенную выше интерпретацию применяем к данной аксиоме, в результате получаем функцию, тождественно равную нулю (табл. 2, 4-й столбец);

Четвертая аксиома ИВ в данной интерпретации преобразуется следующим образом:

$$(A\supset B)\supset(C\vee A\supset C\vee B)=(\overline{A}\vee B)\supset(\overline{(C\vee A)}\vee C\vee B=$$
$$=1(1A\vee B)\vee 1(C\vee A)\vee C\vee B.$$

Из табл. 3 видно, что в результате получаем функцию, тождественно равную нулю.

В результате применения правила подстановки к формуле, тождественно равной нулю в данной интерпретации, всегда получаются формулы, тождественно равные нулю.

Таблица 2

Расчет значений $\neg(A\vee B)\vee B\vee A$, $\neg A\vee A\vee B$

A	B	$\neg(A\vee B)\vee B\vee A$	$\neg A\vee A\vee B$
0	0	$1\vee 0\vee 0=0$	$1\vee 0\vee 0=0$
0	1	$1\vee 1\vee 0=0$	$1\vee 0\vee 1=0$
0	2	$1\vee 2\vee 0=0$	$1\vee 0\vee 2=0$
1	0	$1\vee 0\vee 1=0$	$0\vee 1\vee 0=0$
1	1	$0\vee 1\vee 1=0$	$0\vee 1\vee 1=0$
1	2	$2\vee 2\vee 1=0$	$0\vee 1\vee 2=0$
2	0	$1\vee 0\vee 2=0$	$2\vee 2\vee 0=0$
2	1	$2\vee 1\vee 2=0$	$2\vee 2\vee 1=0$
2	2	$1\vee 2\vee 2=0$	$2\vee 2\vee 2=0$

Таблица 3

Расчет значений $\neg(\neg A\vee B)\vee\neg(C\vee A)\vee C\vee B$

A	B	C	$\neg(\neg A\vee B)\vee\neg(C\vee A)\vee C\vee B$
0	0	0	$\overline{\overline{0}\vee 0}\vee\overline{0\vee 0}\vee 0\vee 0=0$
0	0	1	$\overline{\overline{0}\vee 0}\vee\overline{1\vee 0}\vee 0\vee 1=0$
0	0	2	$\overline{\overline{0}\vee 0}\vee\overline{2\vee 0}\vee 2\vee 0=0$
0	1	0	$\overline{\overline{0}\vee 1}\vee\overline{0\vee 0}\vee 0\vee 1=0$
0	1	1	$\overline{\overline{0}\vee 1}\vee\overline{1\vee 0}\vee 1\vee 1=0$
0	1	2	$\overline{\overline{0}\vee 1}\vee\overline{1\vee 0}\vee 1\vee 2=0$
0	2	0	$\overline{\overline{0}\vee 2}\vee\overline{0\vee 0}\vee 0\vee 2=0$
0	2	1	$\overline{\overline{0}\vee 2}\vee\overline{1\vee 0}\vee 1\vee 2=0$
0	2	2	$\overline{\overline{0}\vee 2}\vee\overline{2\vee 0}\vee 2\vee 2=0$
1	0	0	$\overline{\overline{1}\vee 0}\vee\overline{0\vee 1}\vee 0\vee 0=0$
1	0	1	$\overline{\overline{1}\vee 0}\vee\overline{1\vee 1}\vee 1\vee 0=0$
1	0	2	$\overline{\overline{1}\vee 0}\vee\overline{2\vee 1}\vee 2\vee 0=0$
1	1	0	$\overline{\overline{1}\vee 1}\vee\overline{0\vee 1}\vee 0\vee 1=0$
1	1	1	$\overline{\overline{1}\vee 1}\vee\overline{1\vee 1}\vee 1\vee 1=0$
1	1	2	$\overline{\overline{1}\vee 1}\vee\overline{2\vee 1}\vee 2\vee 1=0$
1	2	0	$\overline{\overline{1}\vee 2}\vee\overline{0\vee 1}\vee 0\vee 2=0$
1	2	1	$\overline{\overline{1}\vee 2}\vee\overline{1\vee 1}\vee 2\vee 1=0$
1	2	2	$\overline{\overline{1}\vee 2}\vee\overline{2\vee 1}\vee 2\vee 2=0$
2	0	0	$\overline{\overline{2}\vee 0}\vee\overline{0\vee 2}\vee 0\vee 0=0$
2	0	1	$\overline{\overline{2}\vee 0}\vee\overline{1\vee 2}\vee 1\vee 0=0$
2	0	2	$\overline{\overline{2}\vee 0}\vee\overline{2\vee 2}\vee 2\vee 0=0$
2	1	0	$\overline{\overline{2}\vee 1}\vee\overline{0\vee 2}\vee 1\vee 0=0$
2	1	1	$\overline{\overline{2}\vee 1}\vee\overline{1\vee 2}\vee 1\vee 1=0$
2	1	2	$\overline{\overline{2}\vee 1}\vee\overline{2\vee 2}\vee 1\vee 2=0$
2	2	0	$\overline{\overline{2}\vee 2}\vee\overline{0\vee 2}\vee 0\vee 2=0$
2	2	1	$\overline{\overline{2}\vee 1}\vee\overline{1\vee 2}\vee 1\vee 1=0$
2	2	2	$\overline{\overline{2}\vee 2}\vee\overline{2\vee 2}\vee 2\vee 2=0$

Применяя эту схему заключения к формулам, тождественно равным нулю, всегда получаем формулы, тождественно равные нулю. Действительно, полагая, что $X\equiv 0$ и $X\supset Y\equiv 0$, находим $0\supset Y\equiv 0$, $0\vee Y\equiv 0$, $1\vee Y\equiv 0$, откуда находим $Y\equiv 0$. Из сказанного непосредственно следует, что из второй, третьей и четвертой аксиом с помощью правила подстановки и схемы заключения можно вывести только формулы, тождественно равные нулю. Однако, первая аксиома в данной интерпретации не равна тождественно нулю. Докажем это утверждение.

Действительно, в результате преобразований первая аксиома приобретает следующий вид:

$$A\vee A\supset A=\overline{A\vee A}\vee A\neq 0=\neg(A\vee A)\vee A\neq 0.$$

Таким образом, получаем функцию, не равную тождественно нулю, заданную таблицей:

A	$\neg(A\vee A)\vee A$
0	$\overline{(0\vee 0)}\vee 0=\overline{0}\vee 0=1\vee 0=0$
1	$\overline{(1\vee 1)}\vee 1=\overline{1}\vee 1=1\vee 1=1$
2	$\overline{(2\vee 2)}\vee 2=\overline{2}\vee 2=2\vee 2=2$

Вывод

Следовательно, первая аксиома невыводима из второй, третьей и четвертой аксиом, поэтому она независима от них. Если бы первая аксиома была логически зависима от остальных, то эта зависимость должна была бы сохраниться во всех возможных интерпретациях, однако, мы только что установили, что это не так. Аналогичным образом доказывается независимость всех остальных аксиом исчисления высказываний.

Список литературы

1. *Лещинский, В.А. О логической формализации сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Системы обработки информации. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 8(145). – С. 73-76.*
2. *Лещинский, В.А. О формульной записи сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 2(47). – С. 105-107.*
3. *Лещинский, В.А. О формульном описании переменных сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 3(48). – С. 92-95.*

Поступила в редколлегию 22.06.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПРО ФОРМАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

В.О. Лещінський, І.О. Лещінська

У роботі вводяться поняття формальної несуперечності, повноти і розв'язності логічного числення. Показано, як довести методом інтерпретації незалежність аксіом логічного числення.

Ключові слова: *числення висловлювань, формальна несуперечність, повнота, вирішувана, логічне числення, незалежність аксіом, метод інтерпретації.*

ABOUT FORMAL PROPERTIES OF PROPOSITIONAL CALCULUS

V.A. Leschinskiy, I.A. Leschinska

In this paper we introduce the notion of formal consistency, completeness and solvability of logical calculus. It is shown how to prove the method of interpretation of the independence of the axioms of a logical calculus.

Keywords: *propositional calculus, the formal consistency, completeness, decidability, logical calculus, the independence of the axioms, method of interpretation.*