УДК 621.396.96.095.4:528.8.04-047.27

В.К. Волосюк[1], В.В. Павликов[1], Е.Н. Тимощук[2]

[1] *Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*
[2] *Киевская государственная академия водного транспорта имени гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Киев*

ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНО-ВОЛНОВЫХ V_F-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ ПОЛЕЙ

В физико-алгоримической трактовке обоснованы возможности технической реализации математических V_F-преобразований как алгоритмов спектрально-волнового анализа и пространственно-временной обработки сверхширокополосных полей. V_F-преобразования обратимы и не требуют выполнения условий пространственно-временной узкополосности (квазимонохроматического приближения). На основе исследования этих преобразований рассмотрены характеристики направленности сверхширокополосных антенных систем, определяющие их разрешающую способность по угловым координатам при восстановлении изображений пространственно-протяженных источников радиоизлучения.

Ключевые слова: *V_F-преобразования, сверхширокополосные поля, пространственно-временная обработка сигналов.*

Введение

Применительно к решению нового актуального класса задач оптимальной пространственно-временной обработки широкополосных и сверхширокополосных полей в данной статье рассмотрены и исследованы возможности физической реализации взаимно-обратимых V_F - и V_F^{-1}-преобразований [1, 2].

Преобразования V_F позволяют анализировать волновые поля в зоне Фраунгофера. Их введение позволяет снять проблему применимости классической теоремы Ван Циттерта-Цернике при обработке сверхширокополосных полей при решении задач радиолокации, радиоастрономии и дистанционного зондирования. Эта проблема связана с тем, что классические преобразования Фурье, применимые для анализа узкополосных пространственно-временных полей и требующие выполнения условия пространственно-временной узкополосности (ПВУ) [3], называемого также квазимонохроматическим приближением (КМП), [4], не позволяют в необходимой степени выполнить анализ и соответствующую обработку сверхширокополосных полей в связи с невозможностью разделения временных и пространственных частот. В работах [1, 2] основное внимание уделено математическим свойствам преобразований.

Целью данной работы является рассмотрение, исследование и обоснование возможностей технической реализации этих преобразований для решения задач спектрально-волнового анализа и пространственно-временной обработки сверхширокополосных сигналов.

1. V_F-преобразования как математический аппарат анализа сверхширокополосных пространственно-временных сигналов в зоне Фраунгофера

Применимые для анализа полей в дальней зоне Фраунгофера преобразования V_F, V_F^{-1} имеют вид [1]:

$$f^{-2}c^2\dot{A}(\vec{\vartheta},f) = V_F\{s(\vec{r}',t)\} = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} s(\vec{r}',t)\exp\left\{-j2\pi f\left(t \pm c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right\}dtd\vec{r}', \quad (1)$$

$$s(\vec{r}',t) = V_F^{-1}\left\{\dot{A}(\vec{\vartheta},f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(\vec{\vartheta},f)\exp\left\{j2\pi f\left[t \pm c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{r}'\right]\right\}dfd\vec{\vartheta}, \quad (2)$$

где $V_F\{\cdot\}$, $V_F^{-1}\{\cdot\}$ – операторы прямого и обратного преобразования Волосюка.

Поясним физический смысл этих преобразований. Для этого рассмотрим геометрию задачи, показанную на рис. 1. Здесь введены следующие обозначения: $\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)$ − спектральная плотность комплексной амплитуды по временным частотам f и пространственным переменным $\vec{\vartheta}$; $s\left(\vec{r}',t\right)$ − поле в области его регистрации D', зависящее от времени t и пространственных переменных $\vec{r}' = \left(x',y'\right) \in D'$. В качестве пространственных переменных $\vec{\vartheta}$ рассматриваются направляющие косинусы $\vec{\vartheta}\left(\vec{r}\right) = (\vartheta_x = \cos\theta_x, \vartheta_y = \cos\theta_y)$, характеризующие угловые положения элементов протяженных источников излучения или отражения (рассеивания) электромагнитных волн. В связи с этим в дальнейшем функцию $\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)$ будем называть спектрально-угловой (спектрально-волновой) плотностью комплексной амплитуды, являющейся многомерным спектральным V_F-образом пространственно-временного сигнала (поля) $s\left(\vec{r}',t\right)$. Несмотря на то, что в реальных физических задачах областью определения функции $s\left(\vec{r}',t\right)$ являются пространственный и временной интервалы регистрации поля $\vec{r}' = \left(x',y'\right) \in D'$, $t \in \left(0,T\right)$, а функции $\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)$ − круг $\vec{\vartheta} \in \left(\vartheta_x{}^2 + \vartheta_y{}^2 \le 1\right)$, формально распространим пределы интегрирования до бесконечности, полагая, что эти функции за пределами областей их определения равны нулю.

В классическом представлении через базисные функции − комплексные экспоненты, V_F-преобразования не являются преобразованиями Фурье, т.к. переменные f и $\vec{\vartheta}$, соответствующие временным и пространственным частотам, как сомножители неразделимы.

Однако во многом свойства преобразований V_F подобны свойствам традиционных преобразований Фурье и их можно рассматривать как обобщения последних, применимые для анализа сверхширокополосных полей.

В преобразованиях (1), (2) с одной стороны переменные $\vec{\vartheta}\left(\vec{r}\right)$ и $\vec{r}$ характеризуют пространственное положение излучающих элементов. С другой, являясь аргументами спектральных плотностей комплексных амплитуд излучения, эти переменные пропорциональны пространственным частотам полей $s(\vec{r}',t)$ и содержащихся в них волн по соответствующим переменным.

Функции $\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)\exp\left\{j2\pi ft\right\}dfd\vec{\vartheta}$ характеризует излучающую способность отдельных пространственных элементов $dfd\vec{\vartheta}$ исследуемого пространственно-протяженного источника.

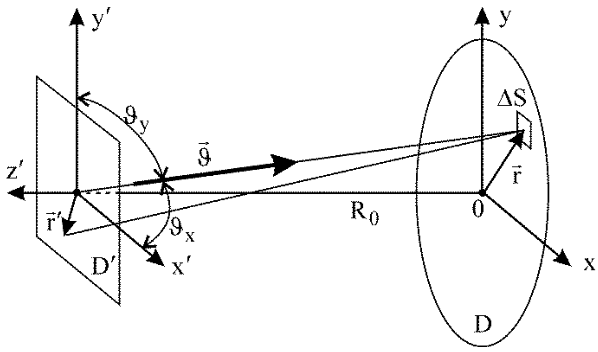

Рис. 1. К пояснению физической сущности V_F-преобразований

Поля, рассеянные случайно-неровными поверхностями а также поля радиотеплового излучения пространственно-протяженных объектов являются случайными. Очевидно, что и процессы $s(\vec{r}',t)$ в области наблюдения D' также являются случайными. Можно показать на примерах спектрального анализа стационарных случайных процессов, что спектральные составляющие поля $s(\vec{r}',t)$ некоррелированы на различных частотах f. Во многих случаях, особенно для радиотеплового излучения, спектральные плотности $\dot{A}(\vec{\vartheta},f)$ также некоррелированы при различных значениях переменных $\vec{\vartheta}$, т.е.

$$\begin{gathered}\left\langle \dot{A}(\vec{\vartheta}_1,f_1)\dot{A}^*(\vec{\vartheta}_2,f_2)\right\rangle = \\ = B\left(\vec{\vartheta}_1,f_1\right)\delta\left(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2\right)\delta\left(f_1 - f_2\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\left\langle\cdot\right\rangle$ − оператор статистического усреднения; $B\left(\vec{\vartheta},f\right)$ − спектральная плотность мощности поля $s(\vec{r}',t)$ (спектральная яркость протяженного источника излучения). Соотношение (3) характерно для статистически стационарных во времени и однородных в пространстве случайных процессов. Из этих соотношений и рассмотренных преобразований следуют теоремы, которые можно рассматривать как обобщения теоремы Ван Циттерта-Цернике, применимые для математического анализа и исследований случайных сверхширокополосных полей. Классическая теорема Ван Циттерта-Цернике [4, 5], предполагает выполнение условий ПВУ (КМП).

На основе результатов и выводов теории Карунена-Лоэва об ортогональных разложениях случайных процессов и в дополнение к спектрально-корреляционным теоремам Хинчина-Винера и Ван Циттерта-Цернике рассмотрим следующие теоремы.

Теорема 1. Эта теорема утверждает, что корреляционная функция $R(\vec{\rho}',\tau) = \left\langle s(\vec{r}',t)s(\vec{r}' \pm \vec{\rho}',t \pm \tau)\right\rangle$ стационарного и однородного процесса $s(\vec{r}',t)$ и его спектральная плотность мощности $B\left(\vec{\vartheta},f\right)$ связаны между собой преобразованиями V_F:

$$f^{-2}c^2 B\left(\vec{\vartheta}, f\right) = V_F\left\{R\left(\vec{\rho}', \tau\right)\right\} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R\left(\vec{\rho}', \tau\right)\exp\left\{-j2\pi f\left(\tau + c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{\rho}'\right)\right\}d\tau d\vec{\rho}', \tag{4}$$

$$R(\vec{\rho}', \tau) = V_F^{-1}\left\{B\left(\vec{\vartheta}, f\right)\right\} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B\left(f, \vec{\vartheta}\right)\exp\left\{j2\pi f\left(\tau + c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{\rho}'\right)\right\}df\, d\vec{\vartheta}. \tag{5}$$

Правую часть формулы (5) получаем непосредственной подстановкой в формулу для корреляционной функции $\left\langle s(\vec{r}', t)s(\vec{r}' \pm \vec{\rho}', t \pm \tau)\right\rangle$ правой части выражения (2) с учетом равенства (3). Выражение (4) получим, применив к (5) преобразование V_F и учитывая следующие равенства:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{j2\pi\left(f - f_1\right)\tau + c^{-1}\left(f\vec{\vartheta} - f_1\vec{\vartheta}_1\right)\cdot\vec{\rho}'\right\}d\tau d\vec{\rho}' = \\ = c^2 f^{-2}\delta\left(f - f_1\right)\delta\left(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_1\right), \tag{6}$$

$$\delta\left(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_1\right) = \delta\left(\vartheta_x - \vartheta_{x1}\right)\delta\left(\vartheta_y - \vartheta_{y1}\right).$$

Первое равенство в (6) получаем из интегрального представления дельта-функции

$$\delta\left(x - x_1\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi\left(x - x_1\right)\tau}d\tau\,. \tag{7}$$

В (4), (5) спектральная плотность мощности $B\left(\vec{\vartheta}, f\right)$ является двухсторонней $f \in \left(-\infty, \infty\right)$ и четной функцией f (как и в теории спектральных преобразований случайных функций одного переменного t).

Теорема 2. Эта теорема эквивалентна первой теореме, но касается комплексных аналитических процессов. Комплексный аналитический процесс имеет вид:

$$\dot{s}\left(\vec{r}', t\right) = s\left(\vec{r}', t\right) + js_{\perp}\left(\vec{r}', t\right), \tag{8}$$

где $s_{\perp}(\vec{r}', t)$ − сопряженный процесс, связанный по переменной t с процессом $s(\vec{r}', t)$ преобразованием Гильберта. Спектральная плотность комплексного процесса $\dot{s}(\vec{r}', t)$ удвоена по абсолютному значению в положительной области переменной f и равна нулю при $f < 0$, т.е. является односторонней. Тогда

$$\dot{s}(\vec{r}', t) = \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\dot{A}(\vec{\vartheta}, f)\exp\left\{j2\pi f[t + c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{r}']\right\}d\vec{\vartheta}df. \tag{9}$$

Учтем, что для аналитического процесса $\dot{A}(\vec{\vartheta}, f) = 0$ при $f < 0$. Тогда формально можно распространить нижний предел интегрирования по переменной f на $-\infty$ и записать

$$\dot{s}(\vec{r}', t) = V_F^{-1}\left\{2\dot{A}(\vec{\vartheta}, f)\right\}. \tag{10}$$

Умножив обе части (9) на сопряженную функцию $\exp\left\{-j2\pi f_1(\tau + c^{-1}\vec{\vartheta}_1\vec{r}')\right\}$, интегрируя по переменным r' и t в бесконечных пределах и, учитывая (6), получим

$$V_F\left\{\dot{s}(\vec{r}', t)\right\} = 2f^{-2}c^2\cdot\dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right). \tag{11}$$

Таким образом, комплексный аналитический процесс $\dot{u}(\vec{r}', t)$ также связан со своей спектральной плотностью ($2\dot{A}(\vec{\vartheta}, f)$, $f > 0$) V_F -преобразованиями.

Формулируется теорема 2 следующим образом: комплексная функция когерентности $\dot{\Gamma}(\vec{\rho}, f)$ (взаимная корреляционная функция комплексно-сопряженных аналитических стационарных и однородных процессов) $\dot{s}(\vec{r}', t)$, $\dot{s}^*(\vec{r}', t)$ и односторонняя (равная нулю при $f < 0$) спектральная плотность мощности $B(\vec{\theta}, f)$ связаны между собой V_F-преобразованиями

$$\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}', \tau\right) = \left\langle\dot{s}\left(\vec{r}_1', t_1\right)\dot{s}^*\left(\vec{r}_2', t_2\right)\right\rangle = V_F^{-1}\left\{4B\left(\vec{\vartheta}, f\right)\right\}, \\ f^{-2}c^2\, 4B\left(\vec{\vartheta}, f\right) = V_F\left\{\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}', \tau\right)\right\}. \tag{12}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Для получения первой формулы (12) необходимо в ее левую часть подставить (10) и учесть равенство (3). Для получения второй формулы (12) необходимо к первой применить V_F -преобразование и учесть равенство (6). Также следует учесть, что односторонняя (т.е. определенная для $f > 0$) спектрально-угловая плотность комплексной амплитуды $\dot{A}\left(f_1, \vec{\vartheta}_1\right)$ комплексного аналитического процесса $\dot{s}\left(\vec{r}', t\right) = s\left(\vec{r}', t\right) + js_{\perp}\left(\vec{r}', t\right)$ удвоена по амплитуде.

Эти результаты обобщают теорему Ван Циттерта-Цернике для анализа широкополосного излучения в дальней зоне Фраунгофера. Классические варианты этой теоремы следуют из рассмотренных выше теорем при выполнении условий ПВУ (КМП). Эти условия выполняются для узкополосных сигналов. Их спектр расположен в окрестности средней частоты f_0 и его ширина $\Delta f << f_0$.

2. Учёт условия ПВУ (КМП)

Представим условие ПВУ (КМП) в виде [3, 4]:

$$\frac{\Delta F_{ef}\,\vec{\vartheta}_{max}\,\vec{r}'_{max}}{c} \ll 1\,, \tag{13}$$

где ΔF_{ef} − эффективная полоса частот, занимаемая сигналом, $\vec{\vartheta}_{max}$ – направление, соответствующее максимальному угловому размеру протяженного источника излучения, $\vec{r}'_{max}$ − координата, соответствующая максимальному размеру апертуры.

Для аналитического сигнала

$$B\left(f,\vec{\vartheta}\right)=\begin{cases}B\left(f-f_0,\vec{\vartheta}\right), & f<0,\\ 0, & f>0.\end{cases} \qquad (14)$$

В этом случае (при одностороннем спектре) в квазимонохроматическом приближении допустимо при скалярном произведении пространственных переменных $\vec{\vartheta}\ \vec{\rho}'$ вместо сомножителя f поставить сомножитель f_0.

Один из классических вариантов теоремы Ван Циттерта-Цернике для дальней зоны Фраунгофера, предполагающий выполнение условия приближения ПВУ, связывает угловую плотность интенсивности (УПИ) $I\left(\vec{\vartheta}\right)$ (интегральную по частоте яркость $B(\vec{\vartheta})$)

$$I\left(\vec{\vartheta}\right)=B\left(\vec{\vartheta}\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}4B\left(f,\vec{\vartheta}\right)df, \qquad (15)$$

и комплексную функцию пространственной когерентности $\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}',0\right)$ двумерным преобразованием Фурье. Для доказательства подставим в (12) значения переменных $\tau=0$ и $f\,c^{-1}\vec{\vartheta}\ \vec{\rho}'\approx f_0c^{-1}\vec{\vartheta}\ \vec{\rho}'$

$$\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}',0\right)=V_F^{-1}\left\{4B\left(f,\vec{\vartheta}\right)\right\}\Big|_{\tau=0}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}4B\left(f,\vec{\vartheta}\right)\exp\left\{j2\pi f\left(\tau+c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{\rho}'\right)\right\}df\,d\vec{\vartheta}\Bigg|_{\tau=0}\approx$$

$$\approx\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}4B\left(f,\vec{\vartheta}\right)df\right\}\exp\left(j2\pi f_0c^{-1}\vec{\vartheta}\,\vec{\rho}'\right)d\vec{\vartheta}=$$

$$=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}I\left(\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f_0c^{-1}\vec{\vartheta}\,\vec{\rho}'\right)d\vec{\vartheta}, \qquad (16)$$

т.е. комплексная функция пространственной когерентности

$$\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}',0\right)=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}I\left(\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f_0c^{-1}\vec{\vartheta}\,\vec{\rho}'\right)d\vec{\vartheta} \qquad (17)$$

связана с угловой плотностью интенсивности $I\left(\vec{\vartheta}\right)$ обычным обратным пространственным двумерным преобразованием Фурье. Очевидно, что

$$\left(\frac{f_0}{c}\right)^{-2}I\left(\vec{\vartheta}\right)=\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{\Gamma}\left(0,\vec{\rho}'\right)\exp\left(-j2\pi f_0c^{-1}\vec{\vartheta}\,\vec{\rho}'\right)d\vec{\rho}'. \qquad (18)$$

Таким образом, комплексная пространственная функция когерентности и угловая плотность интенсивности (интегральная яркость) определяются как:

$$\dot{\Gamma}\left(0,\vec{\rho}'\right)=F^{-1}\left\{I\left(\vec{\vartheta}\right)\right\}=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}I\left(\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f_0c^{-1}\vec{\vartheta}\,\vec{\rho}'\right)d\vec{\vartheta},$$

$$\left(f_0/c\right)^{-2}I\left(\vec{\vartheta}\right)=F\left\{\dot{\Gamma}\left(0,\vec{\rho}'\right)\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{\Gamma}\left(0,\vec{\rho}'\right)\exp\left(-j2\pi f_0c^{-1}\vec{\vartheta}\,\vec{\rho}'\right)d\vec{\rho}'. \qquad (19)$$

Эти формулы соответствуют классической теореме Ван Циттерта-Цернике форме.

Теоремы 1, 2 обобщают теорему Ван Циттерта-Цернике и применимы для спектрально-корреляционного анализа широкополосного и сверхширокополосного излучения с применением как прямых V_F-, так и обратных, V_F^{-1}-преобразований.

3. Физико-алгоритмическое описание V_F-преобразований как математического инструмента, обеспечивающего техническую обработку сверхширокополосных полей

Рассмотренные преобразования в физико-алгоритмической трактовке содержат основные операции спектрального анализа полей в областях временных и пространственных частот, заключающиеся в соответствующей фильтрации во времени и фокусировке (диаграммообразовании) пространственно-распределенных систем на заданные элементы (участки) исследуемых протяженных источников излучаемых или рассеянных сигналов. Так прямое V_F-преобразование пространственно-временного сигнала $s\left(t\ ,\vec{r}'\right)$ при его физической реализации, например, с помощью антенных решеток или других регистрирующих средств, позволяет восстановить спектрально-угловую плотность комплексной амплитуды $\dot{A}\left(f,\vec{\vartheta}\right)$, которая на каждой частоте f после визуализации ее вещественной и мнимой частей представляет собой комплексное изображение источника излучения в зоне Фраунгофера. То же V_F-преобразование, примененное к комплексной функции когерентности (12) позволяет в виде соответствующих изображений восстановить спектральную яркость $B\left(f,\vec{\vartheta}\right)$.

Рассмотрим более подробно физическую сущность этих преобразований, ценным достоинством которых, как отмечалось, является возможность работы со сверхширокополосными полями.

Формула $c^2f^{-2}\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)=V_F\left\{s\left(\vec{r}',t\right)\right\}$ в ее физической интерпретации и в соответствии с выражениями (1), (2) требует для конкретно заданных переменных f_0 и $\vec{\vartheta}_0$ умножения принятого поля $s\left(\vec{r}',t\right)$ на функцию

$$\exp\left\{-j2\pi f_0\left(t+\frac{\vec{\vartheta}_0\,\vec{r}'}{c}\right)\right\}=$$

$$=\exp\left(-j2\pi f_0t\right)\times\exp\left(-j2\pi f_0\cdot\vec{\vartheta}_0\,\vec{r}'/c\right) \qquad (20)$$

и последующего интегрирования по временной переменной t и пространственным координатам $\vec{r}'$,

$$V_F\{s(\vec{r}',t)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} s(\vec{r}',t)\exp\left\{-j2\pi f_0\left(t + c^{-1}\vec{\vartheta}_0\vec{r}'\right)\right\}dtd\vec{r}' =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)\exp\left\{j2\pi f\left[t + c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{r}'\right]\right\}dfd\vec{\vartheta}\right\}\times \quad (21)$$

$$\times\exp\left\{-j2\pi f_0\left(t + c^{-1}\vec{\vartheta}_0\vec{r}'\right)\right\}dtd\vec{r}' = f^{-2}c^2\dot{A}\left(\vec{\vartheta}_0,f_0\right).$$

Здесь при выводе формулы учтено равенство (6). Первый из сомножителей функции (20) вместе с операцией интегрирования по времени отвечает за временную обработку − фильтрацию, в результате которой выделяется спектральная составляющая поля на заданной частоте f_0. Эта операция соответствует обычному время-частотному преобразованию Фурье. Второй сомножитель с соответствующим интегрированием по пространственным координатам $\vec{r}'$ обеспечивает фокусировку антенной системы на заданное направление $\vec{\vartheta}_0$. Теоретически интегрирование в бесконечных пределах по переменной $\vec{r}'$ обеспечивает полное восстановление спектральной плотности комплексной амплитуды $\dot{A}\left(\vec{\vartheta}_0,f_0\right)$ как функции направлений $\vec{\vartheta}_0$. На каждой конкретной частоте f_0 эта операция соответствует пространственному преобразованию Фурье в его традиционной форме. Однако, как уже отмечалось, в целом V_F-преобразование в силу неразделимости временных и пространственных частот не является многомерным пространственно-временным преобразованием Фурье, но сводится к их последовательному (по временным и пространственным переменным) применению.

Практически интегрирование по времени на конечном интервале $t \in (0,T)$ при временной обработке сигнала эквивалентно его фильтрации в полосовом фильтре с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)

$$\left|\dot{K}(j2\pi f)\right| = \left|\frac{\sin\left[\pi T\left(f - f_0\right)\right]}{\pi\left(f - f_0\right)}\right| = T\left|\operatorname{sinc}\left[\pi T\left(f - f_0\right)\right]\right|. \quad (22)$$

Такой АЧХ соответствует избирательное устройство с полосой $\Delta F \approx 1/T$, которое вырезает из спектра $\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)$ не только спектральную линию $\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f_0\right)$, но и боковые частоты, снижая разрешающую способность спектрального анализа.

Далее на заданной частоте сигнала f_0 необходимо построить комплексное изображение $\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f_0\right)$. Для этого необходимо выполнить определенные действия по пространственной обработке принятого поля $s\left(\vec{r}',t\right)$. За пространственную обработку в этом простейшем случае отвечает второй сомножитель в (20).

Интегрирование с весом $\exp\left(-j2\pi f_0 c^{-1}\vec{\vartheta}_0\vec{r}'\right)$ по пространственным координатам $\vec{r}'$ в ограниченной области восстанавливает функцию $\dot{A}\left(\vec{\vartheta}_0,f_0\right)$ по переменной $\vec{\vartheta}_0$ с точностью до сглаживающей ее диаграммы направленности (ДН). ДН является пространственным образом Фурье этой весовой функции, заданной в ограниченной области определения $\vec{r}' \in D'$, которой является апертура антенной системы. Эта ДН имеет максимум в направлении $\vec{\vartheta}_0$. Спектрально-угловая плотность $\dot{A}\left(\vec{\vartheta}_0,f_0\right)$ в различных направлениях $\vec{\vartheta}_0$ восстанавливается с пространственной разрешающей способностью, определяемой шириной луча ДН. Для получения соответствующего изображения нужно в каждом направлении $\vec{\vartheta}_0$ сформировать луч ДН путем сканирования или путем параллельного обзора. При параллельном обзоре формируется веер лучей, покрывающих заданный сектор обзора, в котором находится исследуемый пространственно-протяженный объект. В данном случае эта весовая функция

$$\dot{I}\left(f_0,\vec{\vartheta}_0,\vec{r}'\right) = \exp\left(-j2\pi f_0\frac{\vec{\vartheta}_0\,\vec{r}'}{c}\right), \quad (23)$$

определенная в области, занимаемой апертурой антенной системы $\vec{r}' \in D'$, на заданной частоте f_0 и для заданного направления является амплитудно-фазовым распределением (АФР) чувствительности элементов апертуры $d\vec{r}'$. ДН антенной системы находится с помощью пространственного преобразования Фурье от ее АФР

$$\dot{F}\left(f_0,\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0\right) = \int_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{I}\left(f_0,\vec{\vartheta}_0,\vec{r}'\right)\exp\left(j2\pi f_0\frac{\vec{\vartheta}\vec{r}'}{c}\right)d\vec{r}'. \quad (24)$$

Учитывая, что в V_F-преобразовании второй сомножитель в (20) выполняет функцию АФР предполагаемой апертуры, запишем это преобразование в таком виде

$$V_F\left\{s\left(\vec{r}',t\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty(D')}^{\infty}\int_{-\infty(T)}^{\infty} s\left(t,\vec{r}'\right)\exp\left\{-j2\pi f_0\left(t + \frac{\vec{\vartheta}_0\vec{r}'}{c}\right)\right\}dtd\vec{r}' = \quad (25)$$

$$= \int_{-\infty(T)}^{\infty}\exp\left(-j2\pi f_0 t\right)dt\int_{-\infty(D')}^{\infty} s\left(t,\vec{r}'\right)\dot{I}\left(f_0,\vec{\vartheta}_0,\vec{r}'\right)d\vec{r}'.$$

Очевидно, что в бесконечных пределах интегрирования

$$V_F\left\{s\left(\vec{r}',t\right)\right\} = V_F\left\{V_F^{-1}\left\{\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right)\right\}\right\} = f^{-2}c^2\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right). \quad (26)$$

Подставим в (25) в соответствии с (26) выражение (2) для $s(t,\vec r')$

$$\int\limits_{-\infty(T)}^{\infty} \exp(-j2\pi f_0 t) \int\limits_{-\infty(D')}^{\infty} \dot I\left(f_0,\vec\vartheta_0,\vec r'\right)\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\dot A\left(f,\vec\vartheta\right)\exp\left\{j2\pi f\left(t+\frac{\vec\vartheta\,\vec r'}{c}\right)\right\}dfd\vec\vartheta\right\}dtd\vec r' =$$

$$=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\dot A\left(f,\vec\vartheta\right)\int\limits_{-\infty(T)}^{\infty}\exp\left\{j2\pi\left(f-f_0\right)t\right\}dt\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot I\left(f_0,\vec\vartheta_0,\vec r'\right)\exp\left(j2\pi f\frac{\vec\vartheta\,\vec r'}{c}\right)d\vec r'dfd\vec\vartheta.$$

С учетом того, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j2\pi\left(f-f_0\right)t\right\}dt=\delta\left(f-f_0\right), \quad (27)$$

запишем выражение (25) в следующем виде

$$V_F\left\{s\left(\vec r',t\right)\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\dot A\left(f_0,\vec\vartheta\right)\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot I\left(f_0,\vec\vartheta_0,\vec r'\right)\exp\left(j2\pi f_0\frac{\vec\vartheta\vec r'}{c}\right)d\vec r'd\vec\vartheta = \quad (28)$$

$$=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\dot A\left(f_0,\vec\vartheta\right)\dot F\left(f_0,\vec\vartheta-\vec\vartheta_0\right)d\vec\vartheta.$$

Свертка комплексного изображения с диаграммой направленности указывает на тот факт, что качество изображения (разрешающая способность) зависит от вида ДН и ее ширины. В бесконечных пределах (гипотетический случай)

$$\dot F\left(f_0,\vec\vartheta-\vec\vartheta_0\right)=\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\exp\left\{j2\pi\frac{f_0}{c}\left(\vec\vartheta-\vec\vartheta_0\right)\vec r'\right\}d\vec r'=$$

$$=\left(f_0/c\right)^{-2}\delta\left(\vartheta_x-\vartheta_{0x}\right)\delta\left(\vartheta_y-\vartheta_{0y}\right)= \quad (29)$$

$$=\left(f_0/c\right)^{-2}\delta\left(\vec\vartheta-\vec\vartheta_0\right),$$

и в этом случае – преобразование полностью обратимо, т.е. справедливо равенство (26).

Рассмотрим выражение для ДН в ограниченных пространственных пределах интегрирования, $\vec r'\in D'$. Если АФР определено в конечной области наблюдения, например, в простейшем случае в области в виде площади прямоугольной формы

$$\dot I\left(f_0,\vec\vartheta_0,\vec r'\right)=I\left(\vec r'\right)\exp\left(-j2\pi\cdot\left(f_0/c\right)\cdot\vec\vartheta_0\vec r'\right),$$

$$I\left(\vec r'\right)=I\left(x'\right)I\left(y'\right)= \quad (30)$$

$$=\begin{cases}1 \text{ при } x'\in\left(-X'/2,X'/2\right),y'\in\left(-Y'/2,Y'/2\right),\\ 0 \text{ при } x'\notin\left(-X'/2,X'/2\right),y'\notin\left(-Y'/2,Y'/2\right),\end{cases}$$

то $$\dot F\left(\vec\vartheta-\vec\vartheta_0\right)=$$

$$=\int\limits_{-X'/2}^{X'/2}\int\limits_{-Y'/2}^{Y'/2}\exp\left\{j2\pi\frac{f_0}{c}\left[\begin{matrix}\left(\vartheta_x-\vartheta_{0x}\right)x'+\\+\left(\vartheta_y-\vartheta_{0y}\right)y'\end{matrix}\right]\right\}dx'dy'=$$

$$=X'Y'\sin c\left[\pi\frac{f_1}{c}\left(\vartheta_x-\vartheta_{0x}\right)X'\right]\times$$
$$\times\sin c\left[\pi\frac{f_1}{c}\left(\vartheta_y-\vartheta_{0y}\right)Y'\right]. \quad (31)$$

Разрешающая способность антенной системы по направлениям ϑ_x и ϑ_y определяется шириной ДН (24), например, как полуширина углового расстояния в точках, где она обращается в ноль

$$\Delta\vartheta_x=\vartheta_x-\vartheta_{0x}=\frac{c}{f_0X'}=\frac{\lambda_0}{X'},$$
$$\Delta\vartheta_y=\vartheta_y-\vartheta_{0y}=\frac{c}{f_0Y'}=\frac{\lambda_0}{Y'}, \quad (32)$$

$\lambda_0=c/f_0$ – длина волны.

Для нахождения соответствующей характеристики разрешения сверхширокополосной антенной системы запишем полный сигнал после фокусировки ее элементов на направление $\vec\vartheta_0$ с учетом того, что все ее элементы имеют коэффициент передачи $\dot K(j2\pi f)$:

$$s\left(t,\vec\vartheta_0\right)=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot K(j2\pi f)\dot I\left(f,\vec r',\vec\vartheta_0\right)\times$$

$$\times\dot A\left(f,\vec\vartheta\right)\exp\left\{j2\pi f\left(t+\frac{\vec\vartheta\,\vec r'}{c}\right)\right\}d\vec r'df\,d\vec\vartheta= \quad (33)$$

$$=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\dot K(j2\pi f)\dot F\left(f,\vec\vartheta-\vec\vartheta_0\right)\times$$

$$\times\dot A\left(f,\vec\vartheta\right)\exp\left\{j2\pi f\,t\right\}df\,d\vec\vartheta.$$

Спектрально-угловая плотность комплексной амплитуды, характеризующая сверхширокополосное излучение точечного источника, равна:

$$\dot A\left(f,\vec\vartheta\right)=\dot A\left(f\right)\delta\left(\vec\vartheta-\vec\vartheta_1\right),$$

где $\vec\vartheta_1$ – угловое положение источника излучения.

Тогда формула (33) примет вид

$$s\left(t,\vec\vartheta_1-\vec\vartheta_0\right)=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot K(j2\pi f)\dot I\left(f,\vec r',\vec\vartheta_0\right)\times$$

$$\times\dot A\left(f\right)\exp\left\{j2\pi f\left(t+\frac{\vec\vartheta_1\,\vec r'}{c}\right)\right\}d\vec r'df= \quad (34)$$

$$=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\dot K(j2\pi f)\dot F\left(f,\vec\vartheta_1-\vec\vartheta_0\right)\dot A\left(f\right)\exp\left\{j2\pi f\,t\right\}df.$$

Здесь сигнал $s\left(t,\vec\vartheta_1-\vec\vartheta_0\right)$ – функция времени и функционал спектра $\dot A\left(f\right)$. Если функцию $\dot A\left(f\right)\exp\left\{j2\pi f\,t\right\}$ считать характеристикой источника излучения и исключить ее из рассмотрения (или принять $\dot A\left(f\right)=1$ во всей полосе частот $f\in\left(-\infty,\infty\right)$), то в когерентной трактовке диаграммой направленности когерентной сверхширокополосной антенной системы, определяющей ее разрешающую способность, можно назвать интеграл

$$\dot{F}_{СШП}\left(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0\right) = \int\limits_{-\infty(F)}^{\infty} \dot{K}(j2\pi f)\dot{F}\left(f, \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0\right)df \ . \quad (35)$$

На дискретной СШП сетке частот

$$\dot{F}_{СШП}\left(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0\right) = \sum_{i=1}^{N} \dot{K}(j2\pi f_i)\dot{F}\left(f_i, \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0\right). \quad (36)$$

В общем случае разрешающая способность определения положения элемента излучения зависит не только от полосы частот, заданной коэффициентом передачи $\dot{K}(j2\pi f)$, но и от ширины и формы спектра $\dot{A}(f)$.

Выводы

Показано, что наиболее приемлемым математическим аппаратом анализа сверхширокополосных пространственно-временных сигналов (полей) соответственно в дальней зоне Фраунгофера является аппарат V_F - и V_F^{-1}-преобразований. Эти преобразования обладают свойствами многомерных преобразований Фурье, но не являются таковыми в традиционной форме их описания, т.к. в них неразделимы как сомножители временные и пространственные частоты.

Важной их особенностью является то, что они в отличие от традиционных многомерных преобразований Фурье и Френеля не требуют выполнения условия пространственно-временной узкополосности (квазимонохроматического приближения) и позволяют анализировать пространственно- временные сигналы с любой степенью широкополосности.

Рассмотрены теоремы о связи V_F-преобразованиями функций когерентности полей со спектральными яркостями излучения, обобщающие теорему Ван Циттерта- Цернике на случаи анализа сверхширокополосных полей. Дано физико-алгоритмическое описание математических V_F-преобразований с точки зрения их применения как алгоритмов обработки сверхширокополосных полей. Отдельно рассмотрены основные принципы временной и пространственной фильтрации поля на бесконечных и ограниченных интервалах времени и пространства, а также отмечены основные факторы, влияющие на форму диаграммы направленности и разрешающую способность восстановления спектрально-угловой плотности комплексной амплитуды СШП пространственно-временного сигнала.

Список литературы

1. *Волосюк В.К. Преобразование полей и их корреляционных функций в спектральные характеристики протяженных источников широкополосного излучения / В.К. Волосюк // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1993. – Т. 36, № 6. – С. 27-30.*
2. *Волосюк В.К. Спектральные преобразования широкополосных полей и их корреляционных характеристик. Приближение Френеля / В.К. Волосюк // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1994. – Т.37, № 8. – С. 58-66.*
3. *Галькович С.Е. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / С.Е. Фалькович, В.И. Пономарев, Ю.В. Шкварко. − М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.*
4. *Построение изображений в астрономии по функциям когерентности / Под ред- К. ван Схонвелда. − М.: Мир, 1982. –318 с.*
5. *Томпсон Р. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии / Р. Томпсон, Дж. Моран, Дж. Свенсон. − М.: Мир, 1989. – 668 с.*

Надійшла до редколегії 22.06.2016

Рецензент: д-р техн. наук проф. І.В. Баришев, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

ОБГРУНТУВАННЯ ЗАСТОСОВНОСТІ СПЕКТРАЛЬНО-ХВИЛЬОВИХ V_F-ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ ФІЗИЧНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ ОБРОБКИ НАДШИРОКОСМУГОВІ ПОЛІВ

В.К. Волосюк, В.В. Павліков, О.М. Тимощук

У фізико-алгоримічному трактуванні обгрунтовані можливості технічної реалізації математичних V_F-перетворень як алгоритмів спектрально-хвильового аналізу і просторово-часової обробки надширокосмугових полів. V_F-перетворення зворотні і не потребують виконання умов просторово-часової вузькосмуговості (квазімонохроматичного наближення). На основі дослідження цих перетворень розглянуті характеристики спрямованості надширокосмугових антенних систем, що визначають їх роздільну здатність по кутових координатах при відновленні зображень просторово-протяжних джерел радіовипромінювання.

***Ключові слова:** V_F-перетворення, надширокосмугові поля, просторово-часова обробка сигналів.*

JUSTIFICATION OF THE APPLICABILITY OF SPECTRAL-WAVE V_F-TRANSFORMATIONS FOR THE PHYSICAL REALIZATION OF SPACE-TEMPORAL PROCESSING OF ULTRAWIDEBAND FIELDS

V.K. Volosyuk, V.V. Pavlikov, O.M. Tymoshchuk

The physical interpretation of the possibillity of technical realization of the V_F-transformations for spectral wave analysis, and space-temporal processing of ultrawideband fields is given. V_F-transformation are reversible and do not require the conditions of quasi-monochromatic approximation (so called narrowband in space-time domains). Based on the study of these transformations directional characteristics of ultra-wideband antenna systems are considered. It determines their resolution by angular coordinates in the problems of spatially extended objects imaging.

***Keywords:** V_F-transformation, ultra-wideband fields, space-temporal signal processing.*