УДК 519.7

И.А. Лещинская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе рассматривается математическое описание высказываний, вводятся правила построения формул исчисления высказываний. Предложен алгоритм классификации выражений исчисления высказываний на формулы и не формулы. Показано, как получить сокращенную запись формул исчисления высказываний и полные формулы по их сокращенной записи.

Ключевые слова: *исчисление высказываний, формула исчисления высказываний, сокращенная запись формул.*

Введение

В работах [1, 2] мы формализовали понятие высказывания.

В работе [3] понятие высказывания обобщено путем введения переменных высказываний.

Настоящая статья является их продолжением, здесь рассматриваются не сами высказывания, а их математические описания, из которых мы будем извлекать свойства высказываний. В такой методике просматривается аналогия с геометрией, которая базируется на аксиоматической теории.

Отметим и существенное отличие этих методик: геометрия опирается на логику, а логике не на что опираться.

Таким образом, логика рассматривается с двух сторон: как предмет исследования (в математической логике), и как инструмент исследования (например, в геометрии, в естественном языке и т. д.).

1. Построение формул исчисления высказываний

Введем некоторое понятие теории высказываний. Формальная теория высказываний называется исчислением высказываний (ИВ). Первичными элементами ИВ являются буквы A, B, C, …, связки $\neg$, $\vee$, называемые отрицанием и дизъюнкцией, скобки (,) - левая и правая. Буквы, связки и скобки называют символами ИВ. Никакие другие символы, кроме перечисленных, в исчислении высказываний не используются. Кроме того, в ИВ рассматриваются различные конечные последовательности символов, называемые выражениями ИВ.

Например, $\mathrm{A}\vee)(\neg\neg\mathrm{B}$. Из множества всевозможных выражений выделяют подмножество формул ИВ. Формулами ИВ называют, во-первых, все буквы и, во-вторых, все выражения, которые могут быть получены применением конечного числа раз в произвольном порядке двух правил:

1) если выражение X - формула, то выражение $\neg(\mathrm{X})$ - тоже формула;

2) если выражения X и Y - формулы, то выражение $(\mathrm{X}) \vee (\mathrm{Y})$ - тоже формула.

Все остальные выражения не являются формулами. Пример формулы: $(\neg((\mathrm{A}) \vee (\mathrm{C}))) \vee (\mathrm{B})$. Говорят, что множество всех формул ИВ порождаются из букв правилами 1) и 2).

***Пример 1.1**.* а) следующие выражения ИВ не являются формулами ИВ:

$\mathrm{A}\neg)\mathrm{B}(\neg\mathrm{A}\vee)\mathrm{B}$; $\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}(\neg\mathrm{B} \vee \mathrm{A})$; $\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}\left(\mathrm{A}\neg\mathrm{B}\right)\neg \vee$;

б) формулами ИВ являются следующие выражения, построенные с соблюдением правил 1) и 2):

$$\neg\ (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{A} \vee (\neg\mathrm{B} \vee (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}));$$

$$\neg\ (\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B} \vee \neg\ (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}));$$

$$\mathrm{A} \vee \neg\ (\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}.$$

Определения, получаемые с помощью какой-либо порождающей процедуры, называются индуктивными определениями. Индуктивные определения широко используются в математической логике. (Заметим, что в классической математике они встречаются сравнительно редко). Кроме процедуры, порождающей формулы, вводят также процедуру, распознающую формулы среди всевозможных выражений ИВ. Такая процедура называется разрешающей.

Пример 1.2. Разработать и описать в виде алгоритма разрешающую любые выражения исчисления процедуру, классифицирующую любые выражения исчисления высказываний на формулы и не формулы.

Решение. Приведем примеры инструкций: 1) если выражение начинается с закрывающей скобки, то оно - не формула; 2) если выражение начинается знаком отрицания, за ним следует открывающая скобка, а заканчивается выражение закрывающей скобкой, то проверить, является ли формулой выражение, охватываемое этими скобками. Все инструкции должны быть пронумерованы, и каждая из них должна содержать четкие указания о том, к какой следующей инструкции нужно перейти после выполнения очередного шага алгоритма. Обозначим анализируемое выражение ИВ через P. Условимся, что проверку символов, входящих в P, будем осу-

© И.А. Лещинская

ществлять слева направо. Очевидно, что если P - формула ИВ, то она может быть описана только с помощью правил 1) и 2). При этом наиболее простой формулой ИВ будет одна буква.

Алгоритм классификации выражений ИВ на формулы и не формулы должен учитывать следующие основные моменты. Во-первых, способ построения формулы: были ли применены скобки и логические связки $\neg$, $\vee$. В случае отрицательного ответа на эти вопросы, формулой может быть только одна буква. Причем, необходимо исключить сочетание типа $PP, PPP, ...$, когда несколько букв стоят непосредственно друг за другом. Во-вторых, в случае использования скобок и (или) логических связок необходимо выявить и исключить все сочетания символов, противоречащие правилам 1) и 2).

Блок-схема заданного алгоритма представлена на рис. 1, 2.

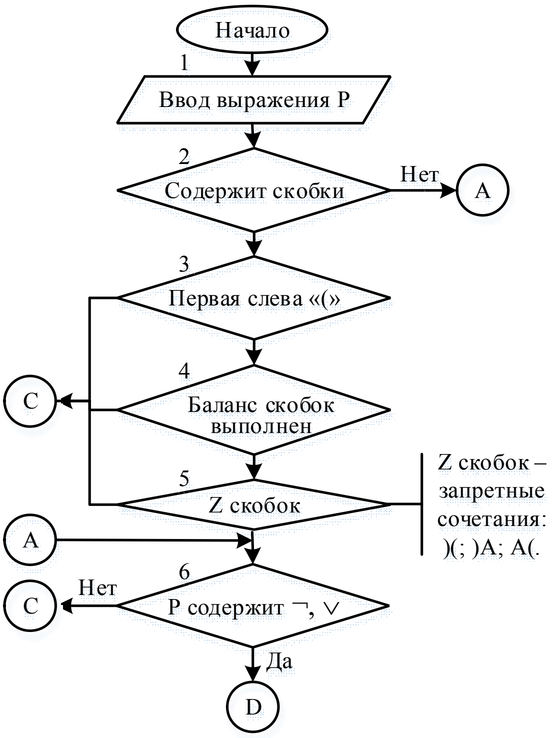

Рис. 1. Блок-схема алгоритма классификации выражений исчисления высказываний

Покажем, что данный алгоритм действительно классифицирует все выражения ИВ на формулы и не формулы. Как видим, алгоритм состоит из 2 основных шагов (блоков).

Рассмотрим их последовательно. На 1-м шаге осуществляется ввод выражения P, (которое, заметим, может быть и пустой строкой) в программу. На 2-м шаге проверяем наличие скобок в выражении P.

Если скобки не обнаружены, переходим к шагу 0 – проверке наличия логических связок в формуле. Если же скобки в P есть, то первой слева всегда должна быть открывающая скобка «(». Проверку этого условия осуществляем на шаге 3. Кроме того, одним из важнейших моментов правильного построения любой формулы является соблюдение баланса скобок, под которым понимается выполнения следующих условий: количество открывающих и закрывающих скобок должно быть равно; последней скобкой в формуле всегда является закрывающая. Эти условия проверяются на 4-м шаге алгоритма.

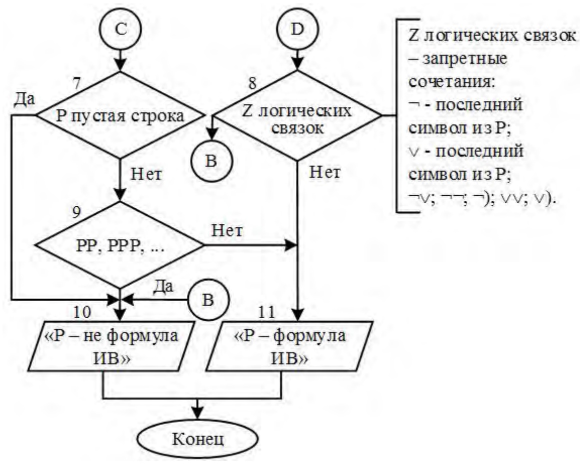

Рис. 2. Продолжение алгоритма

Исключение «запретных» (т.е. синтаксически неправильных) сочетаний со скобками осуществляется на 5-м шаге. После закрывающей скобки в формуле не может стоять открывающая скобка. Таким образом, исключаются сочетания:) (;) A; A (. В случае невыполнения хотя бы одного из условий 3, 4, 5, переходим к шагу 10 – выводится сообщение «P не является формулой ИВ», и алгоритм прекращает свою работу. Если же в результате выполнения первых пяти шагов все условия вхождения скобок в формуле ИВ окажутся выполненными, переходим к шагу 6 и проверяем, содержит ли P логические связки. При отрицательном результате проверяем, не является ли P пустой строкой (шаг 7), и если “да”, то переходим к шагу 10. Кроме того, исключаем из числа формул ИВ строки типа $PP, PPP, ...$, содержащие несколько букв подряд (шаг 9). В случае вхождения $\neg$ и $\vee$ в P проверяем наличие запретных сочетаний логических связок (шаг 8). К таким сочетаниям относятся: 1) $\neg\vee$; 2) $\neg\neg$; 3) $\neg)$; 4) $\neg$ - последний символ в P; 5) $\vee\vee$; 6) $\vee)$; 7) $\vee$ - последний символ в P. При обнаружении хотя бы одного из запретных сочетаний логических связок выдается сообщение «P не является формулой ИВ» (шаг 10). Если же запретных сочетаний логических связок нет, то на этом проверка выражения P заканчивается. Переходим к шагу 11 - вывод сообщения «P является формулой ИВ». Работа алгоритма закончена.

2. Сокращенная запись формул исчисления высказываний

Введенные формулы ИВ имеют серьезные недостатки: они содержат много лишних скобок, наличие которых не обязательно для правильного понимания структуры формулы; они громоздки и неудобны в обращении.

С целью облегчения работы с формулами всюду, где это возможно, вместо самих формул сохраняют лишь те скобки, которые необходимы для восстановления полной записи формулы.

Пример 2.1. Пусть дана формула

$$(\neg((A) \vee (C)) \vee (B)) .$$

Опустив в ней лишние скобки, получим сокращенную запись: $\neg(A\vee C) \vee B$. Исходная формула легко восстанавливается по своей сокращенной записи.

Для еще более компактной записи формул прибегнем к следующим приемам: вместо знака $\neg$ будем писать знак отрицания в виде верхней черты. Тогда формула из нашего примера может быть записана еще более кратко: $\overline{A \vee C} \vee B$. Далее, введем знаки конъюнкции, импликации и эквивалентности:

$$AB = A \cdot B = A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} ;$$

$$A \supset B = \overline{A} \vee B ; \; A \sim B = (A \supset$$

$$\supset B)(B \supset A) = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B}) .$$

Введем также соглашение о старшинстве связок. В порядке убывания старшинства располагаем связки следующим образом: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\sim$. Используя знак импликации, запишем формулу нашего примера в виде $A \vee C \supset B$.

Нетрудно видеть, что использование сокращенных записей формул позволяет существенно уменьшить их длину.

Пример 2.2. Покажем, как осуществляется переход от сокращенной записи к формуле ИВ, используя приведенные выше соотношения для конъюнкции, импликации и эквиваленции:

$$AB \vee C \supset A = \overline{AB \vee C} \vee A =$$

$$= \overline{AB} \wedge \overline{C} \vee A = \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right)\overline{C} \vee A =$$

$$= \overline{\overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \vee C} \vee A =$$

$$= \neg(\neg(\neg(A) \vee \neg(B)) \vee (C)) \vee (A);$$

$$A \supset B \sim C = \left(\left(\overline{A} \vee B\right) \supset C\right)\left(C \supset \left(\overline{A} \vee B\right)\right) =$$

$$= \left(\overline{\overline{A} \vee B} \vee C\right)\left(\overline{C} \vee \left(\overline{A} \vee B\right)\right) =$$

$$= \overline{\overline{\left(\overline{\overline{A} \vee B} \vee C\right)} \vee \overline{\left(\overline{C} \vee \left(\overline{A} \vee B\right)\right)}} = \neg(\neg(\neg(\neg(A) \vee$$

$$\vee(B)) \vee (C)) \vee \neg(\neg(C) \vee (\neg(A) \vee (B)))).$$

Выводы

Введенное нами определение формулы ИВ не единственно возможное. Известно много других равносильных определений. Так, в одном из них в качестве исходных связок используются знаки импликации и отрицания. Дизъюнкция вводится как сокращение $A \vee B = \overline{A} \supset B$. Конъюнкция и эквивалентность вводятся точно так же, как и раньше. В зависимости от того, какие связки выбраны в качестве исходных для построения формул, получаются различные, но равносильные друг другу, варианты ИВ. Изучаемый нами вариант, использующий связки отрицания и дизъюнкции, был впервые разработан английским логиком Расселом и усовершенствован немецким математиком Гильбертом.

Список литературы

1. Лещинский, В.А. О логической формализации сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Системы обработки информации. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 8(145). – С. 73-76.

2. Лещинский, В.А. О формульной записи сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 2(47). – С. 105-107.

3. Лещинский, В.А. О формульном описании переменных сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 3(48). – С. 92-95.

Надійшла до редколегії 20.06.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.

ФОРМУЛИ ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

І.О. Лещінська

У роботі розглядається математичний опис висловлювань, вводяться правила побудови формул числення висловлювань. Запропоновано алгоритм класифікації виразів числення висловлювань на формули і не формули. Показано, як отримати скорочений запис формул числення висловлювань і повні формули за їх скороченому запису.

Ключові слова: *числення висловлювань, формула числення висловлювань, скорочений запис формул.*

THE FORMULAS OF THE PROPOSITIONAL CALCULUS

I.A. Leschinska

Mathematical description of expressions is in-process examined, the rules of formulas construction of propositional calculus are entered. The algorithm of propositional calculus expressions classification on formulas and not formulas is offered. It is shown how to get the brief record of propositional calculus formulas and complete formulas by their brief appointment.

Keywords: *propositional calculus, formula of propositional calculus, brief record of formulas.*