УДК 519.7

В.А. Лещинский

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О ТЕОРЕМАХ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе рассматриваются некоторые интерпретации исчисления высказываний – лингвистическая, логическая, алгебраическая и теоретико-множественная. Введено понятие теоремы исчисления высказываний и правила вывода теорем из аксиом. Введены понятия содержательной полноты и непротиворечивости логического исчисления.

Ключевые слова: *исчисление высказываний, теорема исчисления высказываний, законы логики высказываний, непротиворечивость, полнота исчисления высказываний.*

Введение

В работах [1 – 3] понятие высказывания формализовано и обобщено путем введения переменных высказываний, предложен алгоритм анализа и классификации выражений исчисления высказываний (ИВ) на формулы и не формулы, а также введена сокращенная запись формул ИВ. Настоящая статья является их продолжением, здесь рассматриваются различные интерпретации ИВ. Индуктивно вводится понятие теоремы. Рассмотрена процедура порождения всевозможных теорем ИВ из ее аксиом.

1. Интерпретация исчисления высказываний

Внутри самого ИВ воздерживаются от какой-либо содержательной интерпретации изучаемых формул. Интерпретации появляются лишь при том или ином конкретном применении исчисления высказываний. Взятое же само по себе, ИВ представляет собой некую формальную математическую теорию, которая, как оказывается, может быть содержательно проинтерпретирована различными способами. При этом некоторые интерпретации совсем не связаны с логикой.

Рассмотрим четыре интерпретации исчисления высказываний.

Лингвистическая интерпретация. Буквы ИВ интерпретируем как постоянные простые высказывания в виде предложений естественного языка (например, русского). Символы исчисления высказываний $\neg$, $\vee$ понимаем как логические связки «не» и «или». Знаки $\wedge$, $\supset$, $\sim$, используемые при сокращенной записи формул, понимаем как логические связки «и», «если-то», «если и только если-то». Формулы ИВ интерпретируем как постоянные сложные высказывания.

Логическая интерпретация. Буквы ИВ интерпретируем как переменные высказывания. Интерпретация связки - прежняя. Формулы интерпретируем как высказывания о свойствах постоянных высказываний. Некоторую часть формул интерпретируем как законы логики высказываний.

Алгебраическая интерпретация. Буквы интерпретируем как булевы переменные. Связки $\neg$, $\vee$ интерпретируем как обозначения булевых функций отрицания и дизъюнкции; знаки $\wedge$, $\supset$, $\sim$ - как обозначения булевых функций конъюнкции, импликации и эквивалентности. Формулы исчисления высказываний интерпретируем как формулы алгебры логики.

Теоретико-множественная интерпретация. Буквы ИВ интерпретируются как подмножества некоторого универсума. Связки $\neg$, $\vee$ и знак $\wedge$ интерпретируются соответственно как дополнение, объединение и пересечение множеств. Формулы ИВ интерпретируются как формулы алгебры множеств. Заметим, что первые две интерпретации представляют собой естественно-научные или содержательные интерпретации; последние две- математические или формальные.

2. Теоремы исчисления высказываний

Из множества всех формул ИВ выделим некоторое подмножество. Формулы, попавшие в это подмножество, будем называть теоремами. Множество теорем определим с таким расчетом, чтобы в логической интерпретации все теоремы и только они оказались законами логики высказываний. Если это удастся сделать, то понятие закона логики высказываний будет формализовано и заменено строгим математическим понятием теоремы. Понятие теоремы вводится с помощью индуктивного определения.

В различных вариантах ИВ это понятие вводится по-разному.

В варианте исчисления высказываний, разработанном Расселом и Гильбертом, понятие теоремы вводится следующим образом:

Сначала объявляются теоремами следующие четыре формулы:

$$A \vee A \supset A;\ A \vee B \supset B \vee A;$$

$$A \supset A \vee B;\ (A \supset B) \supset (C \vee A \supset C \vee B).$$

Эти формулы называют аксиомами ИВ. Покажем, что в логической интерпретации все аксиомы оказываются законами логики высказываний. Пусть имеются высказывания: A: «Дождь идет»; B: «На улице пасмурно»; C: «Тротуары мокрые». Во всех аксиомах выразим через отрицание и дизъюнкцию:

$$A \vee A \supset A = \overline{A \vee A} \vee A =$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{A} \vee A = \overline{A} \vee A = 1;$$

$$A \vee B \supset B \vee A = \overline{A \vee B} \vee B \vee A = \overline{AB} \vee B \vee A =$$

$$= (\overline{A} \vee B)(\overline{B} \vee B) \vee A = \overline{A} \vee B \vee A = 1 \vee B = 1;$$

$$A \supset A \vee B = \overline{A} \vee A \vee B = 1 \vee B = 1;$$

$$(A \supset B) \supset (C \vee A \supset C \vee B) =$$

$$= \overline{(\overline{A} \vee B)} \vee (\overline{C \vee A} \vee C \vee B) =$$

$$= A\overline{B} \vee \overline{CA} \vee C \vee B = (A\overline{B} \vee B) \vee (\overline{CA} \vee C) =$$

$$= (A \vee B)(\overline{B} \vee B) \vee (\overline{C} \vee C)(C \vee \overline{A}) =$$

$$= A \vee B \vee C \vee \overline{A} = 1 \vee B \vee C = 1.$$

Таким образом, в результате преобразований мы получили тождественно истинные высказывания, т.е. законы логики высказываний. В этом нетрудно убедиться, подставив в формулах вместо значений A, B и C их содержательные интерпретации, приведенные выше (предлагаем читателю сделать это самостоятельно).

Кроме перечисленных выше, теоремами называются также все формулы, которые могут быть получены из аксиом применением конечного числа раз в произвольном порядке следующих двух правил:

Первое правило. Если формула X - теорема, y - буква, фигурирующая в этой теореме, и Z - некоторая формула, то формула V, получаемая подстановкой Z в X вместо y, тоже есть теорема. Иными словами, если вместо переменной высказывания везде, где она встречается, подставить любую формулу, то в результате будем иметь также тождественно истинные высказывания.

Пример 2.1. Вывести теорему с помощью первого правила. Пусть

$$X = A \supset A \vee B,\ y = A,\ Z = A \vee B \supset B \vee A.$$

Формула X - это теорема, т.к. она совпадает с третьей аксиомой. Выражение Z есть формула; $y = A$ - это буква, фигурирующая в теореме X. Подставляем в теорему X вместо буквы A формулу Z. В результате получаем новую теорему:

$$V = (A \vee B \supset B \vee A) \supset (A \vee B \supset B \vee A) \vee B.$$

Убедимся в том, что полученная в примере формула V - это закон логики высказываний. С этой целью выразим импликацию через отрицание и дизъюнкцию. Формула V преобразуется следующим образом:

$$V = (A \vee B \supset B \vee A) \supset (A \vee B \supset B \vee A) \vee B =$$

$$= \overline{(\overline{A \vee B} \vee B \vee A)} \vee (\overline{A \vee B} \vee B \vee A) \vee B =$$

$$= 1 \vee B = 1.$$

Таким образом, мы показали тождественную истинность высказывания V, следовательно, оно является законом логики высказываний.

Второе правило. Если формулы X и $X \supset Y$ являются теоремами, то формула Y также есть теорема.

Пример 2.2. Выведем теорему с помощью второго правила. Пусть

$$X = A \vee B \supset B \vee A,\ Y = (A \vee B \supset B \vee A) \vee B.$$

Нетрудно видеть, что формула X - это теорема, т.к. она совпадает со второй аксиомой. Формула $X \supset Y$ также является теоремой:

$$X \supset Y =$$

$$= (A \vee B \supset B \vee A)((A \vee B \supset B \vee A) \vee B) =$$

$$= \overline{(\overline{A \vee B} \vee B \vee A)} \vee (\overline{A \vee B} \vee B \vee A) \vee B.$$

В самом деле, она совпадает с теоремой V, полученной в предыдущем примере. Следовательно, формула Y также является теоремой.

Убедимся в том, что в логической интерпретации формула $Y = (A \vee B \supset B \vee A) \vee B$ - это закон логики высказываний.

Действительно:

$$Y =$$

$$= (A \vee B \supset B \vee A) \vee B = (\overline{A \vee B} \vee B \vee A) \vee B =$$

$$= (\overline{A \vee B} \vee A \vee B) \vee B = 1 \vee B = 1.$$

Следовательно, Y представляет собой тождественно истинное высказываний и является законом логики высказываний.

Сформулированные выше два правила называют правилами вывода. Первое называют правилом подстановки, второе - схемой заключения. Заметим, что правила 1) и 2) в формальной интерпретации представляют собой описания некоторых булевых функций. В первом правиле описывается трехместная функция, первый аргумент которой X - теорема, второй y - буква, третий Z - формула. Значением функции V является теорема. Кроме того, функция V - частичная, поскольку ее значение не определено, если в качестве y указана буква, отсутствующая в теореме X. Функция, описываемая во втором правиле, двухместная. Ее аргументами и значениями служат теоремы. Эта функция также является частичной, поскольку она определена лишь в том случае, когда значение второго аргумента имеет вид $X \supset Y$, где X - значение первого аргумента.

Пример 3. Построим какие-либо теоремы ИВ, пользуясь правилом подстановки и схемой заключения. Кроме того, убедимся, что полученные теоремы в логической интерпретации есть законы логики высказываний.

а) Пусть дано:

$$X = A \vee B \supset B \vee A,\ y = A,\ Z = A \vee A \supset A.$$

Как видим, X представляет собой теорему, совпадающую со второй аксиомой, $y = A$ является буквой, фигурирующей в теореме X, а выражение Z является формулой. Подставим в теорему X вместо буквы A формулу Z и покажем, что в результате также получаем теорему ИВ:

$$V = (A \vee A \supset A) \vee B \supset B \vee (A \vee A \supset A) =$$

$$= \overline{(\overline{A \vee A} \vee A) \vee B} \vee B \vee \overline{A} \vee A = \overline{1 \vee B} \vee B \vee 1 =$$

$$= 0 \vee B \vee 1 = 1.$$

Таким образом, полученное с помощью правила подстановки высказывание V также является теоремой ИВ.

б) Пусть

$$X = A \vee A \supset A,$$

$$Y = (A \vee A \supset A) \vee B.$$

Нетрудно видеть, что X - теорема ИВ, совпадающая с первой аксиомой. Запишем формулу $X \supset Y$ в следующем виде:

$$X \supset Y = A \vee A \supset A \supset (A \vee A \supset A) \vee B =$$

$$= \overline{(\overline{A \vee A} \vee A)} \vee \overline{A \vee A} \vee A \vee B = \bar{1} \vee 1 \vee B =$$

$$= 0 \vee 1 \vee B = 1.$$

Таким образом, формула $X \supset Y$ также является теоремой. Следовательно, согласно правилу вывода, высказывание Y также является теоремой ИВ. В самом деле, используя логическую интерпретацию, формулу Y можно записать в виде:

$$Y = (A \vee A \supset A) \vee B =$$

$$= \overline{A \vee A} \vee A \vee B = \overline{A} \vee A \vee B = 1 \vee B = 1.$$

Итак, мы показали, что Y является тождественно истинным высказыванием и представляет собой закон логики высказываний.

3. Вывод теоремы

Правила вывода дают нам процедуру порождения из аксиом всевозможных теорем ИВ. Оказывается, что можно ввести также и разрешающую процедуру, распознающую теоремы среди всевозможных формул ИВ.

Известна разрешающая процедура Поста: производим алгебраическую интерпретацию формулы и строим для нее таблицу булевых значений. Если булева функция, представленная этой формулой, оказывается тождественно равной единице, то формула есть теорема, в противном случае - не теорема. В ИВ вводят также понятие вывода теоремы.

Любая конечная последовательность формул $X_1, X_2, ..., X_n$ называется выводом теоремы X_n, если каждая формула этой последовательности есть либо аксиома, либо результат применения одного из правил вывода к некоторым из предыдущих формул. Для доказательства того, что некоторая формула является теоремой, достаточно построить ее вывод. Тот факт, что формула X есть теорема, обозначают следующим образом: $\vdash X$ (запись читается так: “Формула X есть теорема”).

Пример 3.1. Построить вывод теоремы

$$(A \vee B \supset B \vee A) \vee B.$$

Решение:

Вывод данной теоремы запишется в виде следующей последовательности формул:

$$A \supset A \vee B;$$

$$(A \vee B \supset B \vee A) \supset (A \vee B \supset B \vee A) \vee B;$$

$$A \vee B \supset B \vee A;$$

$$(A \vee B \supset B \vee A) \vee B.$$

Как видим, первая и третья формулы в этой последовательности – аксиомы.

Вторая формула получена из первой с помощью правила подстановки: вместо буквы A подставили формулу $A \vee B \supset B \vee A$.

Четвертая формула получена на схеме заключения из второй и третьей формул.

Таким образом, построенная последовательность формул есть вывод, а четвертая формула есть теорема, полученная в результате этого вывода:

$$\vdash (A \vee B \supset B \vee A) \vee B.$$

Пример 3.2. Построить вывод теоремы

$$(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B)).$$

Решение:

Применим правило подстановки $C \to \overline{C}$ к четвертой аксиоме:

$$(A \supset B) \supset (C \vee A \supset C \vee B).$$

Тогда будем иметь:

$$(A \supset B) \supset (\overline{C} \vee A \supset \overline{C} \vee B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B)).$$

Заметим, что при выводе использовано тождество

$$\overline{C} \vee A = C \supset A.$$

4. Содержательная непротиворечивость и содержательная полнота исчисления высказываний

Ранее мы пытались ввести понятие теоремы ИВ с таким расчетом, чтобы каждая теорема могла быть проинтерпретирована как закон логики высказываний. Действительно, каждый закон логики высказываний представляет собой тождественно истинное высказывание. Оно останется тождественно истинным, если вместо любого переменного высказывания, входящего в закон логики, подставить произвольно выбранное высказывание.

Таким образом, после подстановки какой-либо формулы вместо некоторой буквы, входящей в закон логики высказываний, снова получаем закон логики высказываний.

Наконец, если формулы X и $X \supset Y$ - некоторые законы логики высказываний, то формула Y - также закон логики высказываний. Действительно, пусть X и $X \supset Y$ - тождественно истинные высказывания. Предположим, что возможен случай, когда высказывание Y ложно, а, следовательно, и высказывание X ложно. Однако это не так, поскольку X, как тождественно истинное высказывание, не может быть ложным. Следовательно, высказывание Y тождественно истинное.

Выводы

Таким образом, из аксиом ИВ с помощью правила подстановки и схемы заключения могут быть получены только законы логики высказываний. Это значит, что каждая теорема может быть проинтерпретирована как закон логики высказываний. Справедливо также и обратное утверждение: каждый закон логики высказываний может быть формально представлен в виде теоремы. Иначе говоря, из аксиом ИВ может быть выведен любой закон логики высказываний. Примем это утверждение без доказательства, поскольку оно весьма громоздко.

Теперь мы полностью подготовлены к тому, чтобы ввести понятия содержательной полноты логического исчисления. Необходимо заметить, что ИВ является одним из многих исчислений, рассматриваемых в математической логике. Любое логическое исчисление создается с целью формализации тех или иных логических понятий и явлений. Для того, чтобы это исчисление правильно описывало изучаемый предмет, оно должно быть содержательно непротиворечивым и содержательно полным. Логическое исчисление называется содержательно непротиворечивым, если из его аксиом невозможно вывести утверждение, не содержащееся в той исходной области логического знания, для формализования которой создано данное исчисление. Содержательная непротиворечивость ИВ означает, что из его аксиом могут быть выведены только законы логики высказываний. Ранее мы уже показали, что это требование выполняется. Следовательно, ИВ содержательно непротиворечиво.

Логическое исчисление называется содержательно полным, если из его аксиом можно вывести любое утверждение, содержащееся в той исходной области математического знания, для формализации которой создано данное исчисление. Содержательная полнота ИВ означает, что из его аксиом могут быть выведены все законы логики высказываний. Ранее мы показали, что это требование фактически выполняется. Следовательно, ИВ содержательно полно.

Список литературы

1. Лещинский, В.А. О логической формализации сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Системы обработки информации. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 8(145). – С. 73-76.

2. Лещинский, В.А. О формульной записи сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 2(47). – С. 105-107.

3. Лещинский, В.А. О формульном описании переменных сложных высказываний [Текст] / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 3(48). – С. 92-95.

Надійшла до редколегії 20.06.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.

ПРО ТЕОРЕМИ ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

В.О. Лещінський

У роботі розглядаються деякі інтерпретації числення висловлювань – лінгвістична, логічна, алгебраїчна і теоретико-множинна. Введено поняття теореми числення висловлювань і правила виведення теорем з аксіом. Введені поняття змістовної повноти і несуперечності логічного числення.

Ключові слова: *числення висловлювань, теорема числення висловлювань, закони логіки висловлювань, несуперечність, повнота числення висловлювань.*

ABOUT THE THEOREMS OF PROPOSITIONAL CALCULUS

V.A. Leschinsky

The paper discusses some of the interpretation of the propositional calculus - linguistic, logical, algebraic and set-theoretic. The concept of propositional calculus theorems and rules of inference theorems from the axioms. The concepts of content completeness and consistency of the logical calculus.

Keywords: *propositional calculus, propositional calculus theorem, expressions logic laws, uncontradiction, propositional calculus plenitude.*